Dr. Fritz Hörmann — Projektseminar Algebraische Zahlentheorie
Sommer 2012
Übungsblatt 3 — Lösungen

---

*1. **Riemann-Roch.** Wir haben ein einfaches Kriterium für einen Quader Q gesehen, das sicherstellt, dass

$$Q \cap K \neq \{0\}.$$

Beweise, dass der Schnitt jedenfalls endlich ist und gib eine geeignete Asymptotik für die Anzahl der Punkte in diesem Schnitt für 'grosse Quader'.

Zusatz: Für diejenigen mit Kenntnissen in algebraischer oder komplexer Geometrie: Warum der Name 'Riemann-Roch'?

Die Endlichkeit ist einfach zu sehen, denn wir haben gesehen, dass K in $\mathbb{A}_K$ diskret liegt. Die Quader sind kompakt und daher ist $Q \cap K$ endlich. Wir betrachten die Fundamentalmasche

$$F = \prod_{\wp} \mathcal{O}_{K_\wp} + [0,1] \begin{pmatrix} \nu_1(\omega_1) \\ \vdots \\ \nu_{r+s}(\omega_1) \end{pmatrix} + \cdots + [0,1] \begin{pmatrix} \nu_1(\omega_n) \\ \vdots \\ \nu_{r+s}(\omega_n) \end{pmatrix},$$

wobei $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ ist ($n = r + 2s$). Die Vektoren sind als Vektoren im Produkt $K_\infty = \prod_{\nu|\infty} K_\nu \cong \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s$ zu verstehen. Wir haben gesehen, dass gilt

$$\mathrm{vol}(F) = \mathrm{vol}(\mathbb{A}_K/K) = 2^{-s}\sqrt{|D_K|}.$$

Zu jedem $\xi \in \mathbb{A}_K^*$ gehört der Quader $Q_C = Q_\xi$, welcher durch $C_\nu = \|\xi_\nu\|_\nu$ parametrisiert wird. Jeder Quader ist von dieser Form. Wir haben die Einbettung $\tau : \mathbb{R}_{>0}^* \hookrightarrow \mathbb{A}_K^*$ (Splitting der Norm), welche α auf $\{\alpha^{1/n}, \dots, \alpha^{1/n}\}$ in K_∞ abbildet. Es gilt offensichtlich $Q_\xi \cap K \cong Q_{k\xi} \cap K$ für $k \in K^*$. Also kommt es nur auf die Klasse von $\xi \in (\mathbb{A}_K^*)/K^*$ an. Erinnere $(\mathbb{A}_K^*)/K^* = (\mathbb{A}_K^*)^1/K^* \times \tau(\mathbb{R}_{>0}^*)$. wobei $(\mathbb{A}_K^*)^1/K^*$ kompakt ist. Sei F^* ein kompakter Fundamentalbereich in $(\mathbb{A}_K^*)^1$ für den Quotienten nach K^*. Wir können nach obigem o.B.d.A. annehmen, dass $\xi = \xi_0\tau(\|\xi\|)$ mit $\xi_0 \in F^*$.
Wir können ferner F^* so mit einem Element aus K^* multiplizieren, dass $\|x\|_\wp \geq 1$ für alle $x \in F^*$ und alle $\wp$.
Bemerkung: F und F^* haben nichts miteinander zu tun.
Setze $m_\nu = \sum_{i=1}^n |\omega_n|_\nu$ für $\nu|\infty$.
Unter der obigen Voraussetzung, dass $C_\wp \geq 1$ für alle $\wp$ gilt nun für $x \in Q_C$

$$x \pm F \subset Q_{C^+}$$

wobei $C_\wp^+ = C_\wp$ für alle $\wp$ sowie für $\nu|\infty$: $(C^+)_\nu^{1/\varepsilon} = C_\nu^{1/\varepsilon} + m_\nu$ (Dreiecksungleichung), wobei $\varepsilon \in \{1,2\}$ je nachdem ob ν reell oder komplex ist. Nun ist $C_{1,\nu} < C_\nu/\|\xi\|^{\varepsilon/n} < C_{2,\nu}$ für alle ξ (F^* ist beschränkt). Sei $\|\xi\|$ genügend gross, so dass $(C^-)_\nu^{1/\varepsilon} := C_\nu^{1/\varepsilon} - m_\nu > 0$ ($\nu|\infty$) und setze $C_\wp^- := C_\wp$.
Es gilt nun

$$Q_{C^-} \subset \bigcup_{k \in Q_C \cap K} x + F \subset Q_{C^+},$$

also

$$\mathrm{vol}(Q_{C^-}) \leq \#(K \cap Q_C)\,\mathrm{vol}(F) \leq \mathrm{vol}(Q_{C^+})$$

Wir haben

$$\mathrm{vol}(Q_{C^\pm}) = \mathrm{vol}(Q_1) \prod_{\wp} C_\wp \prod_{\nu|\infty} (C_\nu^{1/\varepsilon} \pm \mu_\nu)^\varepsilon = (2^r \pi^s)\|\xi\| + O(\|\xi\|^{1-\frac{1}{n}}),$$

(beachte: $\prod_\wp C_\wp$ kann nur endlich viele Werte annehmen, da $\xi_0 \in F^*$). Insgesamt

$$\#(K \cap Q_\xi) = \frac{2^{r+s}\pi^s}{\sqrt{|D_K|}}\|\xi\| + O(\|\xi\|^{1-\frac{1}{n}}).$$

Dies kann man (nach einem kleinen Argument) schreiben als:

$$l(\xi) - i(\xi) = \deg(\xi) + l(\mathcal{O}_K) - g_K \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned}
l(\xi) &= \log(\#(K \cap Q_\xi)) \\
\deg(\xi) &= \log\|\xi\|, \\
i(\xi) &\to 0 \text{ für } \deg(\xi) \to +\infty, \\
l(\mathcal{O}_K) &= \log(\#(K \cap Q_1)) = \log(\#\mu_K), \\
g_K &= i(\mathcal{O}_K) = \log(\frac{\sqrt{|D_K|}\#\mu_K}{2^{r+s}\pi^s})
\end{aligned}$$

wobei diese Dinge die folgenden geometrischen Analoga für eine algebraische Kurve/Riemannsche Fläche X mit Divisor D haben:

$$\begin{aligned}
l(D) &= \dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)), \\
i(D) &= \dim(H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to 0 \text{ für } \deg(D) \to +\infty, \\
l(\mathcal{O}_X) &= \dim(H^0(X, \mathcal{O}_X)) = 1, \\
g_X &= i(\mathcal{O}_X) = \text{Geschlecht von } X.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) gilt dann auch und heisst der **Satz von Riemann-Roch**.
Es ist daher natürlich g_K das **Geschlecht** des Zahlkörpers K zu nennen. Interessanterweise ist $g_{\mathbb{Q}} = 0$! Die Analogie geht tiefer, da im Funktionenkörperfall über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ z.B. gilt:

$$Q_\xi \cap K = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

also

$$l(\xi) = \log(q) l(D),$$

unter der Entsprechung $\xi \leftrightarrow D$ von Idelen (modulo maximal kompakter Untergruppe) und Divisoren.

*2. **Idelklassentopologie.** Sei K ein Zahlkörper und ν eine endliche Stelle von K. Betrachte die Einbettung

$$K_\nu^* \hookrightarrow \pi_0(\mathbb{A}_K^*/K^*).$$

Welche Topologie wird auf K_ν^* induziert? Beschreibe den Abschluss von K_ν^* im Raum auf der rechten Seite.

Hinweis: Erinnere, dass die additive Bewertung eine splittende (nach Wahl eines uniformisierenden Elementes) exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{K_\nu}^* \longrightarrow K_\nu^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induziert.

Eine kleine Motivation vorweg: In der Klassenkörpertheorie wird gezeigt, dass kanonisch

$$\pi_0(\mathbb{A}_K^*/K^*) \cong \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)^{ab}$$

(als topologische Gruppen). Für $K = \mathbb{Q}$ ist dies z.B. induziert durch das Inverse der Abbildung

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(\varinjlim_n \mu_n) = \varprojlim_n \mathrm{Aut}(\mu_n) = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \widehat{\mathbb{Z}}^* = \pi_0(\mathbb{A}_K^*/K^*).$$

Lokal existiert auch eine Einbettung

$$K_\wp^* \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}_\wp|K_\wp)^{ab},$$

welche aber kein Isomorphismus mehr ist, sondern nur noch dichtes Bild hat. Die Einbettung der Aufgabe und die kanonische Einbettung $\mathrm{Gal}(\overline{K}_\wp|K_\wp)^{ab} \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)^{ab}$ entsprechen sich gerade. Welche Topologie wird auf $K_\wp$ induziert? Wie sieht die Vervollständigung aus?
Wir beschränken uns hierbei auf den Fall $K = \mathbb{Q}$. Die Wahl eines uniformisierenden Elementes (z.B. p) induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Q}_p^* \cong \mathbb{Z}_p^* \times p^{\mathbb{Z}}$$

Beachte nun

$$\pi_0(\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*) = \mathbb{A}^*/(\mathbb{Q}^* \cdot \mathbb{R}_{>0}^*) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^*$$

topologisch.
Die induzierte Einbettung $\mathbb{Z}_p^* \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^*$ ist gerade die Einbettung des p Faktors. Sie induziert dieselbe Topologie auf $\mathbb{Z}_p^*$ (explizite Beschreibung der offenen (Basis-)Untergruppen oder einfach nach Definition des topologischen Produktes). Betrachte nun die induzierte Einbettung $\mathbb{Z} \cong p^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^*$. Man überlegt sich leicht, dass sie durch

$$z \mapsto (p^{-z}, \dots, p^{-z}, 1, p^{-z}, \dots)$$

gegeben ist, wobei die 1 im p Faktor steht. Behauptung: Die Abbildung setzt sich zu einer stetigen Abbildung

$$\widehat{\mathbb{Z}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^*$$

fort. Die induzierte Topologie ist daher die "pro-endliche" und der Abschluss topologisch isomorph zu $\widehat{\mathbb{Z}}$. Um zu sehen, dass

$$z \mapsto (p^{-z}, \dots, p^{-z}, 1, p^{-z}, \dots)$$

auf $\widehat{\mathbb{Z}}$ fortsetzt, müssen wir sehen, dass $(p^{-z_i}, \dots, p^{-z_i}, 1, p^{-z_i}, \dots) \to 1$ für $z_i \to 0$. $z_i \to 0$ bedeutet, dass für jedes N ein m existiert, so dass $N|z_i$ für alle $i \geq m$. $(p^{-z_i}, \dots, p^{-z_i}, 1, p^{-z_i}, \dots) \to 1$

bedeutet, dass für jede endliche Stellenmenge S ($p \notin S$) und $\varepsilon > 0$ ein m existiert, so dass $|1 - p^{-z_i}|_l < \varepsilon$ für alle $l \in S$ und $i \geq m$.
Es genügt daher, das folgende zu zeigen: Für alle $l \neq p$ und ε existiert ein N_l so, dass $N_l | z \Rightarrow |1 - p^{-z}|_p < \varepsilon$ (das gesuchte N ist dann einfach $\prod_{l \in S} N_l$). Schreibe:

$$p^{-1} = \xi \cdot (1 + \beta \cdot l)$$

wobei ξ eine $(l-1)$-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_l$ ist (Teichmüller-Lift) und $\beta \in \mathbb{Z}_l$. Falls $(l-1)l^m | z$ gilt

$$|p^{-z} - 1|_l = |\xi^z \cdot (1 + \beta \cdot l)^z - 1|$$

aber $\xi^z = 1$ daher

$$= |(1 + l\beta)^z - 1| = |l^{m+1}(\cdots)|_l \leq l^{-m-1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
Hier haben wir das folgende elementare Statement benutzt:

$$l^{m+1} | (1 + \beta \cdot l)^{l^m} - 1.$$

Für $m = 0$ ist das offensichtlich. Annahme

$$(1 + \beta \cdot l)^{l^m} = 1 + \gamma_{m-1} l^{m-1},$$

daraus folgt (potenzieren mit l):

$$(1 + \beta \cdot l)^{l^{m+1}} = (1 + \gamma_{m-1} l^{m-1})^l = (1 + \gamma_m l^m)$$

für ein $\gamma_m \in \mathbb{Z}$ (oder $\mathbb{Z}_l$).