**Dr. Juan Diego Caycedo — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2015**
Übungsblatt 12

---

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Zyklische Gruppen.** Sei $G$ eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Zeigen Sie

   (a) $\langle \langle g^k \rangle \cup \langle g^l \rangle \rangle = \langle g^{\mathrm{ggT}(k,l)} \rangle$,

   (b) $\langle g^k \rangle \cap \langle g^l \rangle = \langle g^{\mathrm{kgV}(k,l)} \rangle$.

   Dabei bezeichne $\langle x \rangle$ die von $x$ erzeugte zyklische Untergruppe von $G$, d.h.

$$\langle x \rangle := \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \dots\} \subset G.$$

2. **Untergruppen.** Betrachte die (nicht kommutative) Gruppe $D_4$ der Symmetrien eines Quadrats (Rotationen und Spiegelungen, welche das Quadrat in sich überführen). Das Gruppengesetz ist durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben. Sei $\sigma$ die Rotation um 90 Grad (gegen den Uhrzeigersinn) und $\tau$ die Spiegelung an der $x$-Achse. Diese Elemente erzeugen $D_4$:

| | |
|---|---|
| $1$ | Identität |
| $\sigma$ | Rotation um 90 Grad |
| $\sigma^2$ | Rotation um 180 Grad |
| $\sigma^3$ | Rotation um 270 Grad |
| $\tau$ | Spiegelung um die x-Achse |
| $\sigma\tau$ | Spiegelung an der Hauptdiagonalen |
| $\sigma^2\tau$ | Spiegelung an der y-Achse |
| $\sigma^3\tau$ | Spiegelung an der Nebendiagonalen |

   Hier haben wir z.B. „ $\sigma\tau$ “ für die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \tau$ geschrieben. Dies bedeutet, dass **zuerst** $\tau$ **und dann** $\sigma$ ausgeführt wird.

   Es gelten die Relationen $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^3$. Mit Hilfe dieser lassen sich alle Ausdrücke in $\sigma$ und $\tau$ wieder auf eine der 8 Formen in der Tabelle bringen.

   Bestimmen Sie alle 10 Untergruppen von $D_4$ und geben Sie die Ordnungen der Elemente an.

*Bitte wenden!*

3. **Chinesischer Restsatz.** Seien $M > 0$ und $N > 0$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, also so dass $\mathrm{ggT}(M, N) = 1$. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus (mit Begründung!):

$$(\mathbb{Z}/(MN)\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

   Zur Erinnerung: Für zwei Gruppen $G$ und $H$ bezeichnet $G \times H$ die Menge der Paare $(g, h)$, wobei $g \in G$ und $h \in H$, mit der Verknüpfung:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2).$$

   In dieser Aufgabe ist die Verknüpfung auf der rechten Seite natürlich die Operation „+“.

4. **Die Drehgruppe des Würfels.** Beweisen Sie, dass die Gruppe $S_4$ zur Drehgruppe $G$ des dreidimensionalen Würfels isomorph ist, und zwar wie folgt:

   (a) $G$ permutiert die 4 Diagonalen des Würfels. Begründen Sie (ohne zu rechnen!), dass dies (durch Nummerieren der Diagonalen) einen Homomorphismus

$$\rho : G \to S_4$$

   ergibt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\rho$ injektiv ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $G$ und $S_4$ gleich viele Elemente enthalten.

   (d) Folgern Sie, dass $\rho$ ein Isomorphismus ist.

*Abgabe bis Fr 17.7.2015, 10:00 in die Kästen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Gebäude 51.*