Dr. Juan Diego Caycedo — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2015

Übungsblatt 11

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Die Definition des Gruppenhomomorphismus.** Seien G und H zwei Gruppen und

$$f : G \to H$$

eine Abbildung, welche

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b) \qquad \text{für alle } a, b \in G$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass f automatisch ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. dass f auch die Bedingungen $f(e) = e$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ für alle $a \in G$ erfüllt.

2. **Das Zentrum der GL_N.** Sei k ein Körper und $\mathrm{GL}_N(k)$ die Gruppe der invertierbaren $N \times N$-Matrizen über k. Beweisen Sie:

$$Z(\mathrm{GL}_N(k)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in k^* \right\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Vertauschungsbedingung für die Vertauschung mit geeigneten Elementarmatrizen explizit.

3. **Beispiele von Gruppenhomomorphismen.**

   (a) Sei k ein Körper (z.B. $k = \mathbb{R}$). Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : \mathrm{GL}_2(k) &\to (k^*, \cdot) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \det(A) = ad - bc. \end{aligned}$$

   Rechnen Sie nach, dass es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt.

   *(b) Geben Sie einen injektiven Gruppenhomorphismus

$$S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

   an. Hierbei ist S_3 die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks (Drehungen und Spiegelungen, die das Dreieck in sich überführen).

Bitte wenden!

4. **Zweistellige Operationen.** Betrachte eine Menge X mit 4 Elementen. Wieviele verschiedene (zweistellige) Operationen, d.h. Funktionen $\circ : X \times X \to X$ gibt es?

   Es gibt *bis auf Isomorphie*, also bis auf ein Umbenennen der Elemente von X genau zwei verschiedene Gruppen mit 4 Elementen. Finden Sie Beispiele dieser zwei Gruppenstrukturen und geben Sie die Operation tabellarisch an (Verknüpfungstabelle). Folgern Sie, wieviele der obigen Operationen $\circ : X \times X \to X$ gültige Gruppenstrukturen auf X definieren.

   Hinweis zur letzten Frage: Wieviele Umbenennungen, d.h. Bijektionen $X \to X$ gibt es?

5. **Programmieraufgabe (4 Bonuspunkte).** In einer Programmiersprache kann man eine zweistellige Operation auf einer endlichen Menge als ein zweidimensionales Array repräsentieren (z.B. in C++[1]):

```
const int nmax=100;

struct gruppe
{
  int op[nmax][nmax];
  int n;
};

gruppe g;
```

   Schreiben Sie eine Funktion

```
bool testgruppe(const gruppe &g);
```

   welche testet, ob die gegebene Verknüpfung $g.op$ (auf einer Menge mit $g.n$ Elementen) eine Gruppe definiert.

   Für den Fall $n = 4$, schreiben Sie für die beiden Isomorphieklassen von Gruppen aus Aufgabe 4 jeweils ein Hauptprogramm, welche die Struktur g mit der entsprechenden Gruppe initialisiert (durch Eingeben der Tabelle oder durch eine geschickte Schleife) und dann mit der Prozedur "testgruppe" verifiziert.

Abgabe bis Fr 10.7.2015, 10:00 in die Kästen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Gebäude 51.

[1] Sie dürfen eine beliebige Programmiersprache Ihrer Wahl verwenden.