Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2012
Klausurbeispiel

In der Hauptklausur werden *nur ca. 10 Aufgaben* gestellt. Sie haben dafür 2 Stunden Zeit. 50 % reichen zum Bestehen.

1. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $\overline{8}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

2. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
gegeben wird. Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung bzgl. der Basis
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Berechnen Sie
$$\det \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie eine Basis des Schnittes $U_1 \cap U_2$ der beiden folgenden Unterverktorräume des $\mathbb{R}^4$:
$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 4y - z + w = 0 \},$$
$$U_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + 5z - w = 0 \}.$$

5. Beweisen oder widerlegen Sie: Für zwei Untervektorräume V_1 und V_2 eines Vektorraumes W ist auch die Vereinigung $V_1 \cup V_2$ wieder ein Untervektorraum.

6. (a) Berechnen Sie eine Basis des von den Vektoren
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
aufgespannten Untervektorraumes des $\mathbb{R}^4$.

   (b) Ergänzen Sie die gefundene Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

7. Geben Sie einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ als Wertetabelle an.

8. Die Matrizen

$$G = \left(\mathrm{id}_{11}\,|A\right) \text{ und } H = \left(-A^T|\,\mathrm{id}_4\right)$$

beschreiben den binären [15,11,3]-Hamming-Code. Dabei ist A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Decodieren Sie den Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

nach Fehlerkorrektur.

9. Berechnen Sie die Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 6 \cdot x \cdot y + 92 \cdot x + 3 \cdot y$$

und bestimmen Sie, ob es sich jeweils um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

10. Bestimmen Sie den g.g.T. der Polynome $f := X^2 + X + 1$ und $g := X^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ und finden Sie eine Darstellung der Form:

$$\mathrm{ggT}(f, g) = m \cdot f + n \cdot g,$$

mit $m, n \in \mathbb{R}[X]$.

11. Finden Sie eine ganze Zahl x so, dass

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \pmod 9, \\ x &\equiv 9 \pmod{10}. \end{aligned}$$

12. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Interpretieren Sie die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, geometrisch.

Musterlösungen werden in Kürze online gestellt.