Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2012

Übungsblatt 8

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Erzeugung der symmetrischen Gruppen.** Betrachte die Gruppe S_n der Bijektionen der Menge $\{1,\ldots,n\}$ in sich. Erinnere: Das Gruppengesetz wird durch die Hintereinanderausführung von Funktionen gegeben.

   Eine **Transposition** $\sigma \in S_n$ ist eine bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \{1,\ldots,n\} &\to \{1,\ldots,n\} \\ k &\mapsto \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i,j\}, \\ i & \text{falls } k = j, \\ j & \text{falls } k = i, \end{cases} \end{aligned}$$

   wobei i und j zwei verschiedene Zahlen in $\{1,\ldots,n\}$ sind. Mit anderen Worten: σ vertauscht die Zahlen i und j und lässt alle anderen fest.

   Beweisen Sie, dass S_n von diesen Transpositionen erzeugt wird.

   Zusatz (freiwillig): Versuchen Sie eine minimale Menge unter den Transpositionen zu finden, welche S_n erzeugen.

2. **Untergruppen.** Betrachte die (nicht kommutative) Gruppe D_4 der Symmetrien eines Quadrats (Rotationen und Spiegelungen, welche das Quadrat in sich überführen). Das Gruppengesetz ist wiederum durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben. Sei σ die Rotation um 90 Grad (gegen den Uhrzeigersinn) und τ die Spiegelung an der x-Achse. Diese Elemente erzeugen D_4:

1	Identität
σ	Rotation um 90 Grad
σ^2	Rotation um 180 Grad
σ^3	Rotation um 270 Grad
τ	Spiegelung um die x-Achse
$\sigma\tau$	Spiegelung an der Hauptdiagonalen
$\sigma^2\tau$	Spiegelung an der y-Achse
$\sigma^3\tau$	Spiegelung an der Nebendiagonalen

   Hier haben wir z.B. „ $\sigma\tau$ “ für die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \tau$ geschrieben. Dies bedeutet, dass **zuerst τ und dann σ** ausgeführt wird.

   Es gelten die Relationen $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^3$. Mit Hilfe dieser lassen sich alle Ausdrücke in σ und τ wieder auf eine der 8 Formen in der Tabelle bringen.

   Bestimmen Sie alle 10 Untergruppen von D_4 und geben Sie die Ordnungen der Elemente an.

Bitte wenden!

3. **Restklassen.** Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen die folgende Relation

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; N \text{ teilt } x - y,$$

d.h. zwei Zahlen heißen äquivalent, wenn ihre Differenz durch N teilbar ist.

   (a) Beweisen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden **Restklassen** modulo N genannt. Die Menge dieser Restklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Die zu x gehörige Äquivalenzklasse wird mit $\overline{x}$ bezeichnet.

   (b) Begründen Sie, dass $\{0, \ldots, N-1\}$ ein Vertretersystem ist.

   (c) Zeigen Sie, dass

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$$

   und

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$$

   gültige Definitionen einer Operation auf der Menge der Restklassen sind, d.h. nicht von der Wahl der Vertreter x und y abhängen.

4. **Ein Gruppenisomorphismus.** Betrachten Sie die Gruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_2$:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_2, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Die Gruppenoperation ist die Matrixmultiplikation.

Geben Sie einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$$

an. Hier bezeichnet S_3 die in Aufgabe 1 definierte, symmetrische Gruppe. Vergessen Sie nicht, zu beweisen, dass es sich wirklich um einen Isomorphismus handelt.

Abgabe am 25.6.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung