

Verantwortlich für die Übungen:

Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Basen.**

- (a) Ergänzen Sie die folgenden Vektoren zu einer Basis des \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- (b) Ergänzen Sie die folgenden Vektoren zu einer Basis des \mathbb{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Wählen Sie unter den folgenden Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 aus:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

2. **Linearität der Umkehrabbildung.** V, W seien K -Vektorräume. Zeige: Die Umkehrabbildung einer bijektiven K -linearen Abbildung $V \rightarrow W$ ist auch K -linear.
3. **Unendliche Folgen.** V sei der \mathbb{F}_2 -Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$ -Folgen. Sei U die Menge der Folgen von endlichem Träger, d.h. die Teilmenge von V , die aus denjenigen Folgen besteht, bei denen nur an endlich vielen Stellen eine 1 steht.
- (a) Zeige: U ist ein Untervektorraum.
- (b) Finde eine Basis für U .
- (c) Finde unendlich viele Elemente von $V \setminus U$, die linear unabhängig sind.

Bitte wenden!

4. **Dimension.** Bestimmen Sie eine Basis der folgenden Vektorräume, und geben Sie die Dimension an:

(a) V der \mathbb{R} -Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich 4.

(b) Der \mathbb{R} -Vektorraum

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}.$$

(c) Der \mathbb{R} -Vektorraum

$$V := \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d)

$$\mathbb{C}^n,$$

aufgefasst als \mathbb{R} -Vektorraum.

Abgabe am 14.5.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung