Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 9

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

1. **Basiswechsel.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche durch die Matrix (bzgl. der Standardbasis)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben ist. Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

   Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung bzgl. der Basis
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Inversenbildung.** Invertieren Sie die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. **Kern und Bild.** Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ definieren wir den Kern
$$\ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
und das Bild
$$\mathrm{bild}(A) = \{A \cdot v \mid v \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$
Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes.

   Hinweis: Benutzen Sie das Gaussverfahren (ohne Spaltenvertauschungen!), um die Matrix A auf eine Zeilenstufenform, z.B.:
$$B = \begin{pmatrix} * & ? & ? \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
zu bringen (dies ist allerdings nicht die Form die Sie erhalten werden).

Bitte wenden!

Hierbei bezeichnet $*$ einen beliebigen, von Null verschiedenen Eintrag. In dieser Matrix werden diejenigen Spalten in denen eine Stufe auftritt, also im Bild oben die 1. und 3. Spalte, **Pivotspalten** *genannt. Die zugehörigen Vektoren der ursprünglichen Matrix A (!) bilden dann eine Basis von* $\mathrm{bild}(V)$. *Eine Basis des Kerns bestimmt man durch Rückwärtseinsetzen in das Gleichungssystem $B \cdot v = 0$. Die* **Nicht**-*Pivotspalten entsprechen hier freien Parametern. Für jede Nicht-Pivotspalte bekommen Sie also einen Basisvekotor von* $\ker(B) = \ker(A)$.

4. **Schnitt und Summe.** Sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum, welcher durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der Raum, welcher durch die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Bestimmen Sie Basen der Untervektorräume:

(a) V,

(b) W,

(c) $V + W$,

(d) $V \cap W$ **(optional, 4 Zusatzpunkte)**.

Hinweis: Sei $M(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ die Matrix, deren Spalten die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{bild}(M(v_1, \ldots, v_n)), \\ V + W &= \mathrm{bild}(M(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)). \end{aligned}$$

Hinweis zu (d): Bezeichne für einen Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $V^\perp$ den Untervektorraum der Vektoren die auf V senkrecht stehen, mit anderen Worten

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^k \mid (v^T) \cdot w = 0 \textit{ für alle } v \in V\}.$$

Es gilt dann, falls V von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugt wird:

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker(M(v_1, \ldots, v_n)^T), \\ V \cap W &= (V^\perp + W^\perp)^\perp. \end{aligned}$$

Damit können Sie die Aufgabe auf das Bestimmen von ker *und* bild *geeigneter Matrizen zurückführen. Siehe Aufgabe 3.*

Abgabe am 11.7.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung