Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 7

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte. 16 Punkte zählen als 100 %.

1. **Unterräume des $\mathbb{R}^3$.** Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen ein $\mathbb{R}$-Unterverktorraum des $\mathbb{R}^3$ ist:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$,

   (b) $\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) $T_1 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (d) $T_2 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (e) $T_1 \cap T_2$,

   (f) $T_1 \cup T_2$.

2. **Lineare Unabhängigkeit.** Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{R}$? Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{F}_3$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Lineare Abhängigkeit.** Die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ müssen linear abhängig sein, da es mehr als 3 sind. In diesem Fall sind sogar je 3 der Vektoren linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie für jeden der 4 Vektoren eine Darstellung als Linearkombination der übrigen 3 Vektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

4. **Auswählen einer Basis.** Die folgenden 5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ erzeugen einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum hiervon. Wählen Sie eine geeignete Teilmenge unter ihnen, die eine Basis dieses Unterraumes bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzfrage: Liegt der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in diesem Unterraum?

5. **Folgen.** Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum V der unendlichen Folgen $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ mit Einträgen $a_i \in \mathbb{R}$ und die folgende Menge $x_1, x_2, \dots$ von Folgen:

$$(x_N)_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } N \nmid i, \\ 1 & \text{falls } N \mid i, \end{cases}$$

für $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Also mit anderen Worten:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1,1,1,1,1,1,1,\dots), \\ x_2 &= (1,0,1,0,1,0,1,\dots), \\ x_3 &= (1,0,0,1,0,0,1,\dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig (mit Begründung)?

(a) $x_1, x_2, \dots$ sind linear unabhängig.
(b) $x_1, x_2, \dots$ sind ein Erzeugendensystem von V.
(c) $x_1, x_2, \dots$ sind eine Basis von V.

Abgabe am 27.6.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung