

Nachtrag: C linearer Code, Prüfmatrix („check matrix“) H

Minimalgewicht von $C \geq d \Leftrightarrow$ je $d-1$ Spalten von H sind linear unabhängig

$$H = (s_1 | s_2 | \dots | s_n)$$

↑
Spaltenvektoren von H

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = 0$$

$$\Leftrightarrow H \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

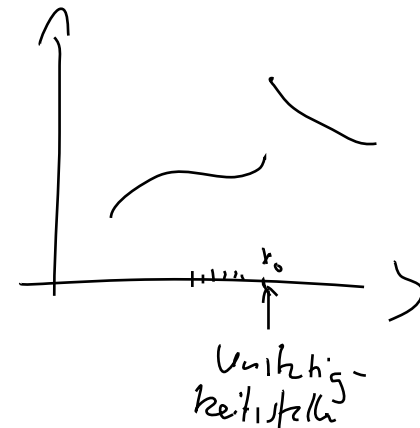
↖ minimale Anzahl der i mit $\alpha_i \neq 0$ ist das Minimalgewicht von C
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$

Kapitel „Kodierungstheorie“ gibt es als Skript auf meiner Skript-Seite

Analysis mehrerer Veränderlicher

Erinnerung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$

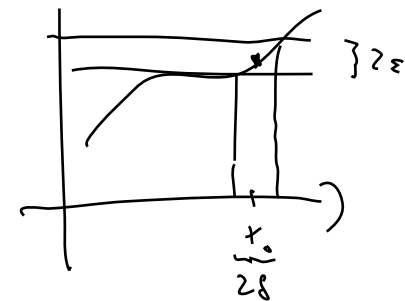
stetig in $x_0 \in D$: 1) (Folgenstetigkeit) : für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x , $x_n \in D, x \in D$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$
 (anschaulich: kein Sprungstelle in x_0)



2) (ϵ - δ -Kriterium) : $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D$:

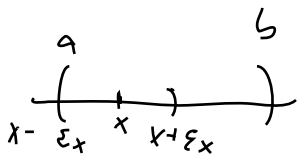
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

3) (topologisch) für jede offene Menge O in \mathbb{R} , die $f(x_0)$ enthält, ist $f^{-1}(O) = \{x \in D \mid f(x) \in O\}$ offen in D



$O \subseteq \mathbb{R}$ offen \Leftrightarrow für $x \in O$: x ist kein „Randpunkt“ von O
 d.h. $\exists \epsilon_x > 0$ mit $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \subseteq O$

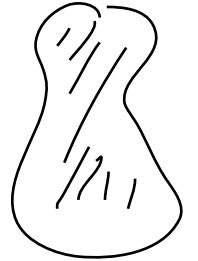
$\Leftrightarrow O$ ist Vereinigung offener Intervalle $(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$
 (nämlich $O = \bigcup_{x \in O} (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$)



σ' offen in $D \Leftrightarrow$ es gibt $\sigma \subseteq \mathbb{R}$, σ offen, $\sigma' = \sigma \cap D$

$A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \sigma$ offen

(„A enthält alle Randpunkte“) \Leftrightarrow für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
Grenzwert x : wenn alle $x_n \in A$,
dann auch $x \in A$



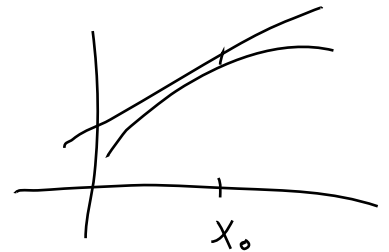
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$

anschaulich: kein „Knick“ bei x_0

geometrisch: $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Funktionsgraph bei x_0

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar :

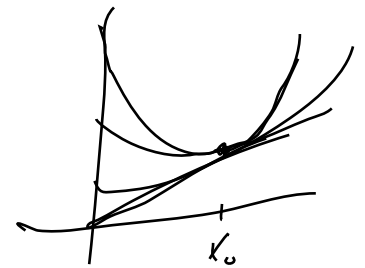
f ist in jedem $x \in D$ differenzierbar, d.h. $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert,
und f' ist stetig



etc: $C^k(D, \mathbb{R}) = \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} k\text{-mal stetig differenzierbar, d.h.} \\ f^{(k)} \text{ existiert und ist stetig} \end{array} \right\}$

Taylorentwicklung: $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, dann man f annähern durch ein Polynom vom Grad k :

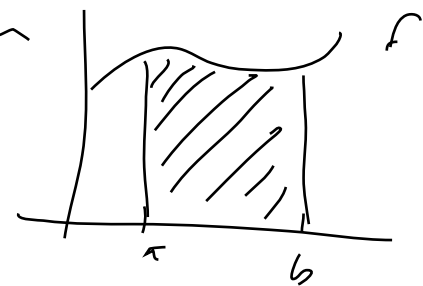
$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + \text{Restglied}$$



Besonders schön Funktionen, „analytische Funktionen“, lassen sich im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ als Potenzreihen darstellen

f stetig: f ist integrierbar $\int_a^b f(x) dx$

anschaulich:
Flächeninhalt unter dem Graphen



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

F Stammfunktion: $\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\boxed{F' = f}$$

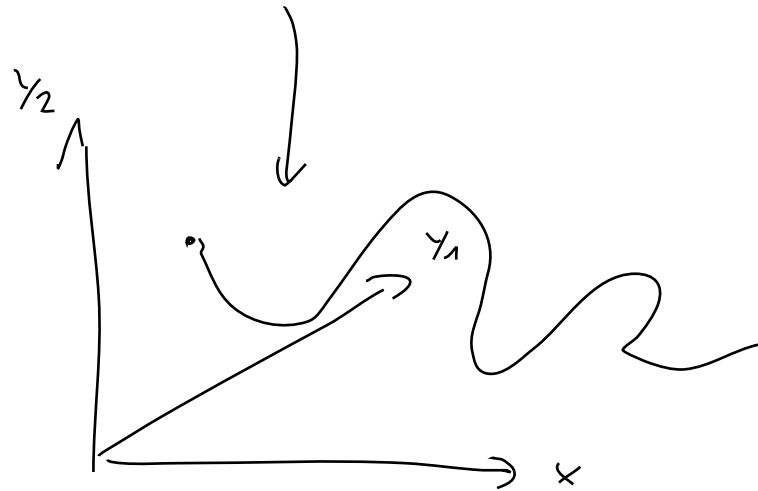
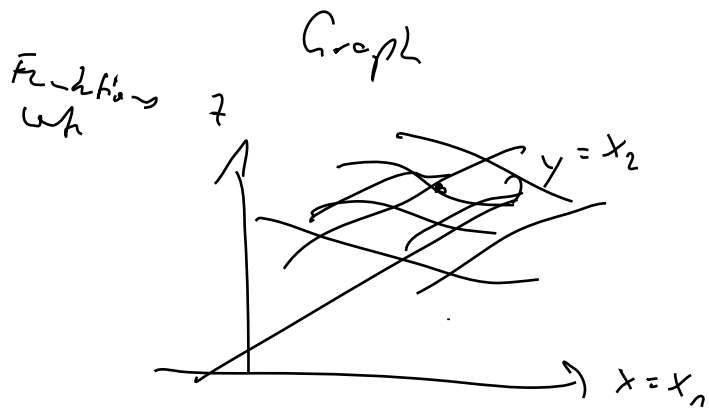
Ziel: Verallgemeinerung für Funktionen: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

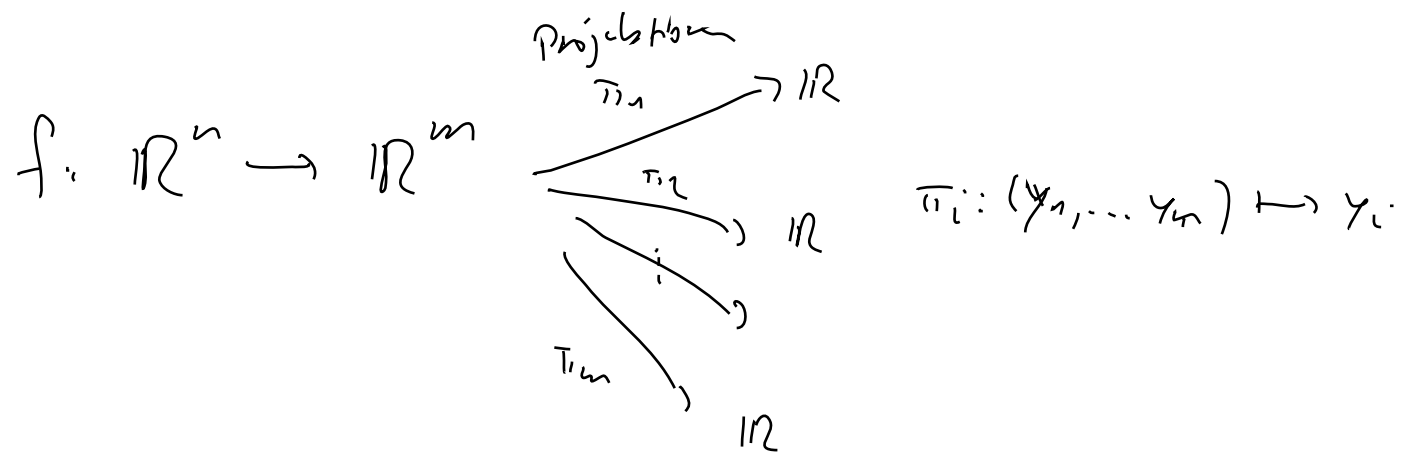
Wie versteht man Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

Graph von f : $\left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n, \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{\in \mathbb{R}^m})}_{\in \mathbb{R}^{n+m}} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

$\in \mathbb{R}^{n+m}$ -Tupel

↳ nur problemlos visualisierbar für $n=1, m=1$ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 $n=2, m=1$ ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)
 $m=1, n=2$ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$)





$f_i := \pi_i \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

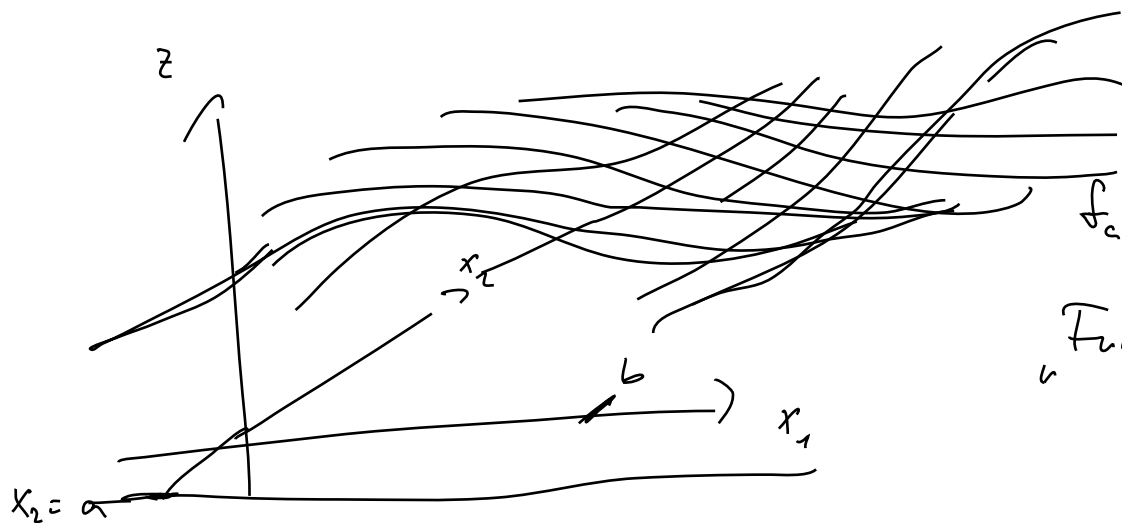
$f = (f_1, \dots, f_m)$

$f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$

$(f_1, \dots, f_m): (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Daher kann fast alles auf Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zurückgeführt werden.

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw. } n=2 \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(b, x)$$

$$f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x, a)$$

"Funktionsfamilie" $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$

$$(f_b)_{b \in \mathbb{R}}$$

Beispiele

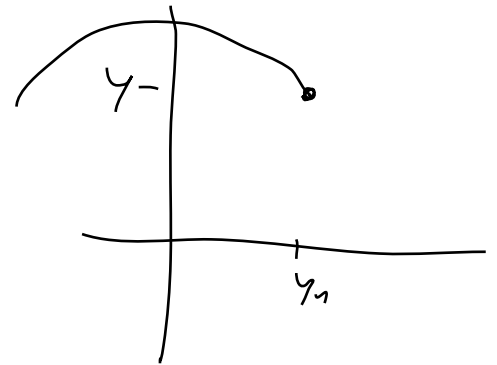
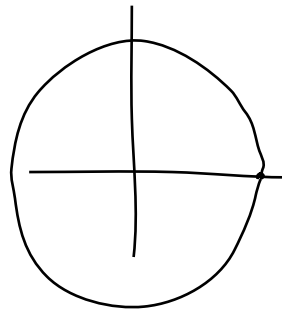
① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man sich vorstellen als \downarrow parametrisierte Kurve in der Ebene (z.B. Zeitkurve)

(Zeit-)Parameter x Punkt zum Zeitpunkt x $f(x) = (y_1, y_2)$

z.B. $f: x \mapsto (\sin x, \cos x)$

Graph: Spirale im Raum

Projektion auf (y_1, y_2) -Ebene
ist Kreis



$g: x \mapsto (\sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2})$ durchläuft auch den Kreis, aber mit halber Geschwindigkeit

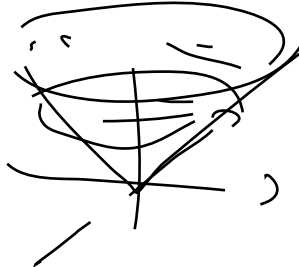
② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierte Kurve im Raum

Vorstellung: $f(x)$ gibt die Raumkoordinaten eines Teilchens, zum Zeitpunkt x

③ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto z^2$
 \parallel \parallel " \parallel
 \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^2 $x+iy$ x^2-y^2+2xyi
 $x+iy \mapsto (x,y)$ $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$

④ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

$n=2$: Funktionsgraph ist Kugel



Niveaulinien: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = r\} = N_r$
 Höhenlinien
 sind hier Kreise

⑤ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Drehung um (0,0) mit Winkel α ; geometrisches Verständnis als Biegung

⑥ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear; durch Matrizen beschrieben \cup
 entsprechen bei den Fkt $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ den Geraden.