Wiederholung:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \\ K^n \arrow[u, "i_B", "\cong"'] & K^m \arrow[u, "\cong", "i_{B'}"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi: V \to W$ linear

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$

(geordnete) Basen von V bzw W

Wie sieht ${}_{B'}\varphi_B = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ aus?

Matrix von $\psi := i_{B'}^{-1} \circ \varphi \circ i_B$, d.h. j-te Spalte ist das Bild von e_j (als Spaltenvektor, ausgedrückt als Koeffizienten bzgl. der Standardbasis von K^m)

d.h.

$$\psi(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

$$\psi(i_B^{-1}(v_j)) = i_{B'}^{-1}(\varphi(v_j)) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, i_{B'}^{-1}(w_i) = i_{B'}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\Big)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{, d.h. die } j\text{-te Spalte von } {}_{B'}\varphi_B \text{ besteht aus den Koeffizienten von } \varphi(v_j) \text{ in der Basisdarstellung bzgl. } B'}$

„Merkformel"

$$\begin{array}{cccc} \varphi(v_1) & \cdots & \varphi(v_n) & \\ \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \end{array}$$

Gilt insbesondere für die Basiswechselmatrizen ${}_{B'}\mathrm{id}_{B}$ $(V = W \cong K^n)$

$$ {}_{B'}\mathrm{id}_{B} = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

Dann $v_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} w_i$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) & \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \end{array}$$

Bsp ② Spezialfall: Basiswechsel durch Umordnung der Basis

$V = W \cong K^n$, Basis B: $v_1, \dots, v_n$ in dieser Ordnung

Basis B' $w_1, \dots, w_n$ $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$

$w_1 = v_{\sigma(1)}, \dots, w_n = v_{\sigma(n)}$

$$v_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} w_i \quad \text{mit} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

„Kronecker-Symbol"

$$\delta_{l,m} = \begin{cases} 1 & \text{falls } l = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp.: $w_1 = v_3$, $w_2 = v_1$, $w_3 = v_2$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \end{array}$$

„Permutationsmatrix": pro Zeile und Spalte genau eine 1, sonst alles 0

$M(\sigma)$ = Basiswechselmatrix zur Basispermutation σ $= \left(\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}\right)_{1 \le i,j \le n}$

- $M(\sigma^{-1}) = M(\sigma)^{-1}$
- $M: \mathrm{Sym}(n) \to GL_n(K)$, $\sigma \mapsto M(\sigma)$, ist Gruppenhomomorphismus

Spezialfall: $\sigma = (i\ j)$ Transposition, die i und j vertauscht o.B.d.A. $i<j$

$$M(\sigma) = \begin{array}{r} i-1 \\ i \\ \\ j \\ n-j \end{array} \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & & & & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix}} & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

$M(\sigma) \cdot A = A$ mit i-ter und j-ter Zeile vertauscht

($n \times n$)-Matrix

$A \cdot M(\sigma) = A$ mit i-ter und j-ter Spalte vertauscht

Basiswechsel: v_i und v_j werden vertauscht $\sigma = (i\,j)$

$M(\sigma)^{-1} \cdot A \cdot M(\sigma)$: entsteht aus A, indem i-te und j-te Spalte und i-te und j-te Zeile vertauscht werden

$\overset{\shortparallel}{M(\sigma)}$

Bsp: 1) $\sigma = (2,3)$

$$M(\sigma)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Drehmatrix für Winkel α $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

bzgl. der umgekehrt geordneten Basis (e_2, e_1):

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ein Ziel der linearen Algebra: gegeben $\varphi: V \to W$

finde Basen B von V, B' von W, so dass

${}_{B'}\varphi_B$ besonders schön

interessanter: $V = W$, sucht Basis B so, dass φ_B besonders schön.

Ganz besonders schön sind „Diagonalmatrizen" $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Falls $\varphi_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit Basis $v_1, \dots, v_n$, dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

(„Streckung um Faktor λ_i")

Def: $v \in V$, $v \neq 0$, heißt Eigenvektor der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$, zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls $\varphi(v) = \lambda v$

Idealfall: es gibt eine Basis aus Eigenvektoren,

(Bem: das gibt es nur in Spezialfällen)

Zwei Hinderungsgründe

(1) Drehung im $\mathbb{R}^2$: 0 Grad, Identität: alle Vektoren sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1

180 Grad, Punktspiegelung am Ursprung:

alle Vektoren sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1

alle anderen Drehungen

aber in $\mathbb{C}^2$ hat z.B. $\varphi =$ die Drehung um $90°$ Diagonalform, d.h.

es gibt eine Basis von $\mathbb{C}^2$, in der die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Diagonalgestalt bekommt.

Eigenwerte sind $-i, i$, Basis B' aus Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Basis $B = \{e_1, e_2\}$

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{B'} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$${}_{B'}\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$e_1 = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad e_2 = a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & \frac{1}{2i}\\ 1/2 & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & \frac{1}{2i}\\ 1/2 & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2i} + 1\cdot\left(-\frac{1}{2i}\right)\\ i\cdot\frac{1}{2} + (-i)\frac{1}{2} & i\cdot\frac{1}{2i} + (-i)\left(-\frac{1}{2i}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1} = ?$$

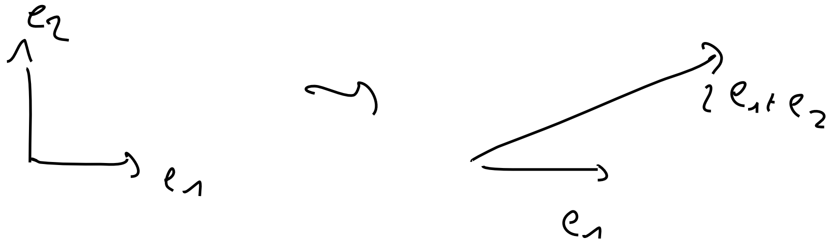
1. Methode: $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_{11} + a_{21}\cdot x_{21} = 1\\ a_{11}\cdot x_{12} + a_{12}\cdot x_{22} = 0\\ \text{usw}\end{array}\right\}$$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannte

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1\end{array}\right)$$

(2) Scherungen, z.B. $\overset{\varphi}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$



e_1 ist Eigenvektor zum Eigenwert 1

aber es gibt keinen zweiten, dazu linear unabhängigen

Hier ist nichts zu machen, man kann nur den „Scherfaktor" 2 normieren

Basis $\overset{B'}{(e_1, \frac{1}{2} e_2)}$: $\varphi_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2} e_2\right)$$

allgemein: Jordan'sche Normalform über $\mathbb{C}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

Homomorphiesatz

Satz. $\varphi: V \to W$ linear. Dann sind $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$ Untervektorräume von W bzw. V.

Beweis: Da φ insb. Gruppenhomom., sind Bild und Kern Untergruppen.

Sei $w \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, z.B. $w = \varphi(v)$. Dann $k \cdot w = k \cdot \varphi(v) = \varphi(kv) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ $\quad k \in K$

Sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, also $\varphi(v) = 0$. Dann $\varphi(k \cdot v) = k \cdot \varphi(v) = k \cdot 0 = 0$

d.h. $k \cdot v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ $\quad$ □

Faktorraum: $U \leq V$ Untervektorraum, dann wird die Menge V/U der Nebenklassen zu einem K-Vektorraum durch

$$k \cdot (v + U) := (k \cdot v) + U$$

z.z. Wohldefiniertheit:

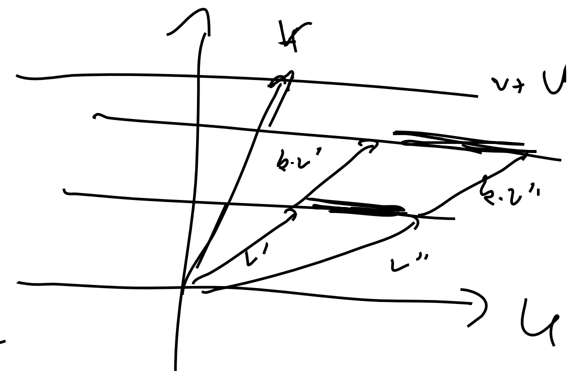
$v' + U = v'' + U$, d.h. $v' - v'' \in U$

$kv' - kv'' = k \cdot (v' - v'') \in U$

d.h. $kv' + U = kv'' + U$

Bsp: $V = K^2$

$U = \langle e_1 \rangle$



Streckungsatz