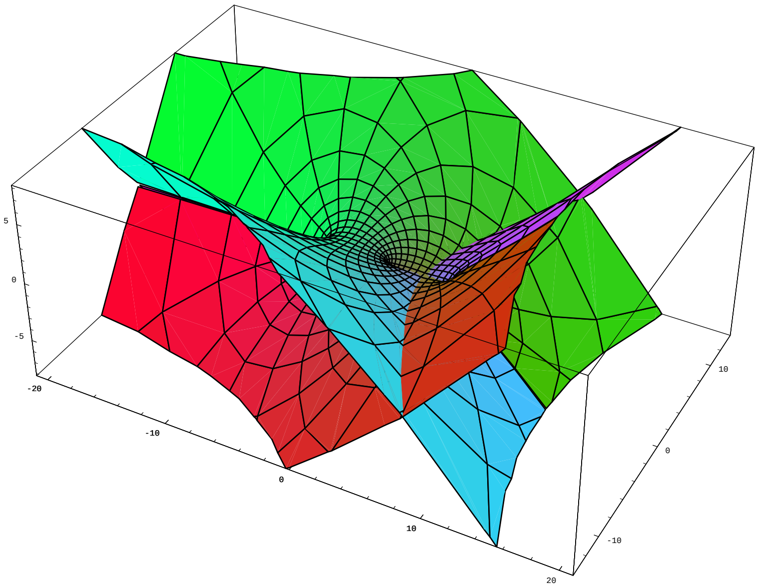
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik



DIPLOMARBEIT

Komplexe Multiplikation

vorgelegt von
Fritz Hörmann

Betreuer: Prof. Dr. R. Weissauer

Heidelberg, den 24. Januar 2005

.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

> The theory of complex multiplication which forms a powerful link between number theory and analysis, is not only the most beautiful part of mathematics but also of all science.
>
> D. Hilbert, Nature 152 (1943), p.183

Der klassische Satz von Kronecker und Weber besagt, dass jede endliche abelsche Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ in einem Einheitswurzelkörper $\mathbb{Q}(\zeta)$ enthalten ist. In der Klassenkörpertheorie ist dies die Aussage, dass die Reziprozitätsabbildung

$$\mathrm{rec} : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}|\mathbb{Q}) \to \pi_0(\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}_m(\mathbb{A})) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^*$$

ein Isomorphismus ist. Die Einheitswurzeln sind Torsionspunkte des Torus $\mathbb{G}_m$, auf denen die Gruppe $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ treu in linearer Weise operiert. Die $\mathbb{C}$-Punkte dieses Torus lassen sich als Gruppe über die Exponentialfunktion $e^{2\pi i\cdot}$ mit der additiven Gruppe $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ identifizieren.

Die Theorie der komplexen Multiplikation dehnt diese Resultate auf abelsche Erweiterungen der *CM-Körper* aus, d. h. auf total komplexe, quadratische Erweiterungen von total reellen Körpern. Im Falle der imaginär quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ erhält man dabei ein vollständiges Resultat, wie oben: Jede endliche abelsche Erweiterung des Körpers $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ist in einem Körper enthalten, der durch Adjunktion von Torsionspunkten einer elliptischen Kurve A *mit komplexer Multiplikation durch* $\mathcal{O}_F$ zu ihrem Definitionskörper entsteht. Dies ist in der Klassenkörpertheorie die Aussage, dass die Reziprozitätsabbildung

$$\mathrm{rec} : \mathrm{Gal}(F^{ab}|F) \to \pi_0(F^x(\mathbb{Q})\backslash F^x(\mathbb{A}))$$

ein Isomorphismus ist und dass die rechte Gruppe 'in linearer Weise' *treu* auf den Isomorphieklassen der elliptischen Kurven und ihrer Torsionspunkte operiert. Die $\mathbb{C}$-Punkte dieser elliptischen Kurven lassen sich als Gruppe, wiederum mit Hilfe meromorpher Funktionen, mit der 'additiven Gruppe' komplexer Tori $\mathbb{C}/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathcal{O}_F$) identifizieren und die Torsionspunkte darin sind von der Form $\frac{1}{N}\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

Im höherdimensionalen Fall, i. e. $\dim F > 2$, hat man zwar einen Isomorphismus

$$\mathrm{rec} : \mathrm{Gal}(E^{ab}|E) \to \pi_0(E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A})),$$

jedoch operiert die rechte Gruppe nicht mehr treu auf den obigen Daten (wobei A jetzt durch eine abelsche Varietät der Dimension $\dim(F)/2$ mit komplexer Multiplikation ersetzt werden muss). Sie operiert nur noch mittels der sogenannten Reflexnorm, vgl. Abschnitt 3.8.

Diese ist, zusammen mit dem Auftreten des Reflexkörpers E, welcher i. a. $\neq F$ ist, ein neues Phänomen.

Die Theorie hat eine besonders elegante und viel weiterreichende Formulierung mit Hilfe der Begriffe der Theorie der Shimuravarietäten und ihrer kanonischen Modelle. Dies wird in dieser Arbeit ausgeführt. Ein Beweis des Hauptsatzes der komplexen Multiplikation in dieser Sprache findet sich am Ende des 3. Kapitels. Er orientiert sich am Beweis des eindimensionalen Falles von Serre [20]. Die grundlegenden Resultate aus der Theorie abelschen Varietäten sind in den Kapiteln 2 (analytische Theorie) und 3 (algebraische Theorie) ohne Beweis angegeben. Im Kapitel 2 finden sich jedoch viele Beweise von Aussagen, die die Natur der komplexen Multiplikation betreffen, bereits in der Sprache der algebraischen Tori.

Ich benutze für die Formulierung und für den Beweis der Existenz eines kanonischen Modelles für $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ das tiefliegende Resultat von Mumford, dass besagt, dass der Modulfunktor der abelschen Varietäten (mit Polarisation und Level-N-Struktur) über $\mathrm{spec}(\mathbb{Z}[1/N])$ darstellbar ist. Dieses geht jedoch in keiner essentiellen Weise in den Beweis des Hauptsatzes ein. Es liefert dort nur auf einfache Weise die Existenz eines Modelles einer abelschen Varietät mit CM über irgendeinem Zahlkörper, sowie a posteriori über dem explizit bestimmten Definitionskörper des Modulpunktes.

Auch die weitergehende Aussage, dass die Shimura-Varietät $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ ein kanonisches Modell über $\mathbb{Q}$ besitzt, kann erhalten werden, ohne Mumford's Resultat zu benutzen. Man braucht dazu die Aussage, dass die Quotienten der Shimura-Varietät quasi-projektive Modelle über $\mathbb{C}$ besitzen. Dieses folgt aus der Theorie der automorphen Funktionen, welche in diesem Fall $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ die Theorie der herkömmlichen Siegelschen Modulfunktionen ist. Die Existenz eines Modelles über $\mathbb{Q}$ folgt dann aus (allerdings recht aufwendigen) Decent-Argumenten. Hierfür verweise ich auf [12, §3] und [13].

Das Kapitel 1 enthält eine Beschreibung allgemeiner Shimuravarietäten als Parameterräume für Hodgestrukturen. In der Tat ist das viel mehr, als im Rest der Arbeit benötigt wird. Eine Motivation für diese sehr allgemeine Theorie im Hinblick auf ihre geometrische Bedeutung wird dann nur noch im Abschnitt 1.14 gegeben. Im Kapitel 1 folge ich den Anfängen der Artikel von Deligne [2] und [3] und erkläre insbesondere die Bedeutung der Axiome. Für die Kodierung der Zusatzinformation (Polarisation, CM, etc.) verwende ich den von Deligne benutzen Begriff der G-Struktur, welcher für die Beschreibung allgemeiner Shimuravarietäten am natürlichsten ist. Im 2. Kapitel werden diese G-Strukturen dann in konkreten Situationen als Zusatzstruktur auf abelschen Varietäten interpretiert.

Ein Schwerpunkt liegt in allen 3 Kapiteln auf der Analyse der adelischen Formulierung. In dieser spricht man nicht mehr von abelschen Varietäten und Level-N-Strukturen (also einer Rigidifizierung ihrer N-Torisionspunkte), sondern vielmehr von abelschen Varietäten *bis auf Isogenie* und einer K-Level-Struktur. Letztere ist eine Klasse mod K von Isomorphismen

$$V_{\mathbb{A}_f} \to T(A) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f,$$

wobei $V_{\mathbb{A}_f}$ ein freier $\mathbb{A}_f$-Modul und $T(A)$ der Tate-Modul der abelschen Varietät ist. Die Formulierungen sind im wesentlichen äquivalent, bis auf den Unterschied, dass die adelische Variante unglaubliche Vorteile in der Formulierung bietet. Sie vereinigt (in diesem Fall) auf natürliche Weise die Galoisoperation auf den Isomorphieklassen der abelschen Varietäten und diejenige auf den Torsionspunkten. Wollte man z. B. für die 'ganzzahligen' Shimura-

Varietäten (siehe 1.9) kanonische Modelle einführen, so wären diese nicht mehr über dem Reflexkörper, sonderen nur noch über einem (über diesem unverzweigten) Klassenkörper definiert. Ausserdem bietet die Betrachtung der Isogenieklassen den Vorteil, beliebige Vertreter zu wählen, die bestimmte Eigenschaften haben, z. B. komplexe Multiplikation durch die Hauptordnung in F haben oder eine Polarisation $A \to {}^tA$, welche ein Isomorphismus ist.

Die beiden Formulierungen werden schon im abstrakten Fall der allgemeinen Hodgestrukturen in Kapitel 1 eingeführt und auch bereits dort verglichen, siehe 1.10. Ich habe diese beiden Formulierungen über die ganze Arbeit hinweg parallel betrachtet. Dies mag sperrig erscheinen, hilft jedoch auch, die Zusammenhänge klarer zu sehen, z. B. im Abschnitt 2.4, wo dieser Vergleich benutzt wird, um zu sehen, welche Isomorphieklassen abelscher Varietäten (also nicht nur bis auf Isogenie) durch eine Shimuravarietät $Sh(T_F, h)$ (Bezeichnung siehe dort) beschrieben werden, und damit letztendlich maximal in einer Galoisbahn liegen können. Ein anderes Beispiel ist die Beschreibung des projektiven Systems der Shimuravarietät $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ im 3. Kapitel.

Heidelberg, 9. Januar 2005

F. Hörmann

Notation

$\widehat{\mathbb{Z}}$	$\varprojlim_N \ \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$
$\mathbb{A}_f$	finite $\mathbb{Q}$-Adele $\cong \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$
$\mathbb{A}$	$\mathbb{Q}$-Adele $\cong \mathbb{A}_f \oplus \mathbb{R}$
G	reduktive algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe mit gegebener treuer Darstellung auf $V_{\mathbb{Q}}$
Z	das Zentrum von G
H	reduktive Untergruppe von G
$V_{\mathbb{Q}}$	ein fest gewählter $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit treuer G-Darstellung (meist mit fest gewählter Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
GSp, GO	symplektische bzw. orthogonale Ähnlichkeitengruppe $= \{g \in GL(V_{\mathbb{Q}}) \mid \langle gv, gv \rangle = \lambda_g \langle v, v \rangle\}$ (je nachdem ob $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist)
$V_{\mathbb{Z}}$	ein gewähltes Gitter in $V_{\mathbb{Q}}$
$V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{Z}[1/N]}$ etc.	allgemein $V_R := V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ für einen Ring R
$V_{\mathbb{A}_f}, V_{\mathbb{C}}$ etc.	allgemein $V_R := V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R
$G(\mathbb{Z})$	$\{\alpha \in G(\mathbb{Q}) \mid \alpha V_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}\}$
$G(\widehat{\mathbb{Z}})$	$\{\alpha \in G(\mathbb{A}_f) \mid \alpha V_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V_{\widehat{\mathbb{Z}}}\}$
$\mathrm{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})$	siehe 1.3
$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_g)$	Typ einer symplektischen Form auf einem Gitter, i. e. $\exists$ Gitterbasis bzgl. der die Form die Gestalt

$$\begin{pmatrix} & & & d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_g \\ -d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -d_g & & & \end{pmatrix}$$

	hat, mit $d_i/d_j \in \mathbb{Z}$ für alle $i > j$.
$V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$	fest gewähltes Gitter in $V_{\mathbb{Q}}$ auf dem die gewählte symplektische Form vom Typ $\mathbf{d}$ ist
${}^{c}V_{\mathbb{Z}}$	$= g_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Z}}$, für ein Adel $c \in G(\mathbb{A}_f)$

	mit einer Zerlegung $c = g_{\mathbb{Q}} g_K \in GL(\mathbb{Q})GL(\widehat{\mathbb{Z}})$
B	analytischer (Basis-)Raum
$L_{\mathbb{Q}}$	$\mathbb{Q}$-Vektorraum meist mit G-Struktur (1.2) und Hodgestruktur
$L_{\mathbb{Z}}$	Gitter in $L_{\mathbb{Q}}$, meist mit G-Struktur (1.2)
$L_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}, L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{Z}[1/N]}$ etc.	allgemein $L_R := L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ für einen Ring R
$L_{\mathbb{A}_f}, L_{\mathbb{C}}$ etc.	allgemein $L_R := L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ für eine $\mathbb{Q}$-Algebra R
$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$	lokal-konstante Garben (d. h. lokal isomorph zu Garben $(L_{\mathbb{Z}})_U$ und $(L_{\mathbb{Q}})_U$), meist mit den obigen Eigenschaften
$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}[1/N]}$ etc.	wie oben
$\mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ etc.	wie oben
$\{F^p\}$	Hodgefiltrierung von $L_{\mathbb{C}}$ (siehe 1.1)
$\{\mathcal{F}^p\}$	Hodgefiltrierung der Garbe $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_B$ (siehe 1.9)
γ	Level-N-Struktur: $(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{Z/N\mathbb{Z}}$
ξ	K-Level-Struktur: Sammlung (auf einer Überdeckung von B) von Klassen (mod K) $\xi_{U_i} K : (V_{\mathbb{A}_f})_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}\|_{U_i}$, $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt offen
$G(\mathbb{Q})\alpha$	eine G-Struktur von $L_{\mathbb{Q}}$ bzw. $L_{\mathbb{Z}}$, d. h. eine Klasse von Isomorphismen $G(\mathbb{Q})\alpha : L_{\mathbb{Q}} \to V_{\mathbb{Q}}$ bzw. $G(\mathbb{Z})\alpha : L_{\mathbb{Z}} \to V_{\mathbb{Z}}$ oder auch eine G-Struktur von $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, d. h. *lokal* (auf einer Überdeckung von B) gegebene Klassen von Isomorphismen $G(\mathbb{Q})\alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}\|_{U_i} \to (V_{\mathbb{Q}})_{U_i}$ bzw. $G(\mathbb{Z})\alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}\|_{U_i} \to (V_{\mathbb{Z}})_{U_i}$, die auf Schnitten übereinstimmen.
K	kompakt offene Untergruppe von $G(\mathbb{A}_f)$
$K(N)$	bzgl. $V_{\mathbb{Z}}$ gebildete kompakt offene Untergruppe des Levels N: $= \big\{\alpha \in G(\mathbb{A}_f) \mid \alpha V_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V_{\widehat{\mathbb{Z}}};\ \alpha \equiv 1 \mod N\big\}$
$\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_B$	Kategorie der $G, \mathbb{Q}$-Hodgestrukturen über B mit K-Level-Struktur (1.9.2)
$(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\alpha, \{\mathcal{F}_p\}, \xi)$	Objekt in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_B$ bestehend aus: einem lokalen System von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$, einer G-Struktur $G(\mathbb{Q})\alpha$ darauf, einer Hodgefiltrierung der Garbe $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_B$ und einer K-Level-Struktur ξ (jew. siehe oben)
$\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B$	Kategorie der $G, \mathbb{Z}$-Hodgestrukturen über B mit Level-N-Struktur (1.9.2)
$(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, G(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}_p\}, \gamma)$	Objekt in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B$ bestehend aus: einem lokalen System von Gittern $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, einer G-Struktur $G(\mathbb{Z})\alpha$ darauf, einer Hodgefiltrierung der Garbe $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_B$

	und einer Level-N-Struktur γ (jew. siehe oben)
$[\mathcal{C}]$	Menge der Isomorphieklassen in einer Kategorie $\mathcal{C}$ - (in den hier betrachteten Fällen sind dies Mengen)
$Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X)$	Modulraum des Funktors $B \mapsto [\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B]$ für $N >> 1$
$Sh_K(G, X)$	Quotient der Shimuravarietät zum Datum (G, X) (Modulraum des Funktors $B \mapsto [\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_B]$ für K klein)
$Sh(G, C)$	Shimuravarietät zum Datum (G, X) = projektiver Limes über alle $Sh_K(G, X)$
$\mathbb{S}$	$R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$
U_1	$R^{(1)}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$, der Norm-1-Torus in $\mathbb{S}$ (= eindimensionale unitäre Gruppe)
h	$\mathbb{R}$-Morphismus algebraischer Gruppen: $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ korrespondiert zu einer Hodgestruktur über die Gewichtsraumzerlegung: $V^{pq} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid h(z)v = z^q\overline{z}^p v\}$
X	$G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Morphismen h
X^{-1}	Konjugationsklasse der Morphismen von Typ $(-1, 0), (0, -1)$ in GL_n
X^{-1}_{pol}	Konjugationsklasse der Morphismen von Typ $(-1, 0), (0, -1)$ in GSp bzgl. derer die symplektische Form eine Polarisation ist (1.5.1)
S_g^+	Siegelscher oberer Halbraum (nur in 1.8)
(SV1)	$\mathrm{Ad}(h(i))$ eine Cartan-Involution von G^{ad} für ein (alle) $h \in X$
(SV2)	$\mathrm{Ad} \circ h$ induziert auf Lie(G) eine Hodgestruktur vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$
(SV3)	G^{ad} hat keinen $\mathbb{Q}$-Faktor auf den die Projektion von h trivial ist (spielt hier keine Rolle)
(SV4)	Der Gewichtsmorphismus $w : \mathbb{G}_m \to G$ ist über $\mathbb{Q}$ definiert (Im Abschnitt 1 wird meistens sogar o. b. d. A. angenommen, dass h von einem festen Gewicht ist)
(SV5)	$Z(\mathbb{Q})$ ist diskret in $Z(\mathbb{A}_f)$
$\mathcal{O}_U$	Garbe der holomorphen Funktionen auf U
$\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_U(U)$	holomorphe Funktionen auf U
$[\mathcal{E}]$	Für ein Vektorbündel $\mathcal{E}$ über U, die zugehörige Liegruppe über U. Für ein lokales System über U, die zugehörige Liegruppe über U mit diskreten Fasern.
$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}\|_U, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\|_U$, etc.	Garben eingeschränkt auf U
$(V_{\mathbb{Z}})_U, \mathbb{Z}_U, \mathbb{C}_U$, etc.	konstante Garben
F^x	$R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ für einen Zahlkörper F
T_F	Untertorus von F^x in 2.4.2 definiert (für F CM-Körper); hat die Eigenschaft $T_F(\mathbb{Q}) = \{\gamma \in F^* \mid \gamma\overline{\gamma} \in \mathbb{Q}^*\}$
F^+	total reeller Teilkörper von F
$\mathcal{O}$	Ordnung im Zahlkörper F

$\mathcal{O}_F$	Ganzheitsring in F
$av_{g,B,N}$	Familien abelscher Varietäten (komplexer Tori) über B der komplexen Dimension g mit Level-N-Struktur. (2.1.2)
$\mathbb{Q}av_{g,B,K}$	Familien abelscher Varietäten (komplexer Tori) über B der komplexen Dimension g bis auf Isogenie mit K-Level-Struktur. (2.1.3)
$pav_{g,B,\mathbf{d},N}$	Familien abelscher Varietäten über B der komplexen Dimension g mit Polarisation vom Typ $\mathbf{d}$ und Level-N-Struktur. (2.2.2)
$\mathbb{Q}pav_{g,B,K}$	Familien abelscher Varietäten über B der komplexen Dimension g bis auf Isogenie mit Polarisation und K-Level-Struktur. (2.2.3)
$\mathcal{O}_c^{(\iota)}av_{g,B,N}, \mathcal{O}_c^{(\iota)}pav_{g,B,\mathbf{d},N}$	wie oben, mit komplexer Multiplikation $i : \mathcal{O} \to \mathrm{End}(\mathcal{X})$ mit $i(F)' = F$ und $i(F) \cap \mathrm{End}(\mathcal{X}) = i(\mathcal{O})$, $(F = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}))$ mit gewissen Eigenschaften (siehe 2.3.1, 2.4.8)
$F^{(\iota)}av_{g,B,N}, F^{(\iota)}pav_{g,B,N}$	wie oben, mit komplexer Multiplikation $i : F \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X})$ mit $i(F)' = F$ mit gewissen Eigenschaften (siehe 2.3.2, 2.4.10)
$av_{g,S}, pav_{g,\mathbf{d},S}$, etc.	entsprechende Kategorien abelscher Schemata (über einem Basisschema S)
μ_h	(3.3.11)
N_h	Reflexnorm (3.3.11)
$E(G,X)$	Reflexkörper zum Shimura-Datum (G,X) (3.3.9)
E	Reflexkörper von (F,Φ)
Φ	Ein CM-Typ (2.3.3)
$M_{g,\mathbf{d},N}$	algebraischer Modulraum der abelschen Schemata der relativen Dimension g mit Polarisation vom Typ $\mathbf{d}$ und mit Level-N-Struktur (3.1.12).

Kapitel 1

Hodge-Theorie und Shimuravarietäten

1.1 Abstrakte Hodgestrukturen

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Hodgestruktur erklärt. Hodgestrukturen treten in natürlicher Weise auf den Kohomologiegruppen von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten auf. Dies wird am Ende des Kapitels im Abschnitt 1.14 beschrieben.
Viele Details zum Material über Hodgestrukturen im klassischen Sinn kann man in [5] finden, sowie im Hinblick auf die Theorie der Shimuravarietäten in [13].
Sei $L_{\mathbb{Q}}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Die komplexe Konjugation setzt sich auf die Komplexifizierung $L_{\mathbb{C}} := L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ fort.

(1.1.1) Definition. Eine *Hodgestruktur* auf $L_{\mathbb{Q}}$ ist eine Zerlegung

$$L_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} L^{p,q}$$

mit der Eigenschaft

$$L^{p,q} = \overline{L^{q,p}}.$$

Die Menge $\{(p,q) \mid \dim L^{p,q} \neq 0\}$ heißt der Typ der Hodgestruktur; sie heißt vom Gewicht n, falls $\dim L^{p,q} = 0$ für alle $p+q \neq n$.

(1.1.2) Definition. Eine *Hodgefiltrierung* auf $L_{\mathbb{Q}}$ vom Gewicht n ist eine absteigende Familie von Untervektorräumen $\{F^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ($F^p \subseteq F^q$ für $p > q$) von $L_{\mathbb{C}}$ mit der Eigenschaft

$$F^p \oplus \overline{F^q} = L_{\mathbb{C}},$$

für alle $p+q = n-1$.

(1.1.3) Es besteht eine 1:1-Korrespondenz zwischen Hodgefiltrierungen und Hodgestrukturen vom Gewicht n, gegeben durch:

$$F^p = \bigoplus_{p'\geq p} L^{p',q'},$$

sowie in umgekehrter Richtung durch

$$L^{p,q} = \begin{cases} F^p \cap \overline{F^q} & p+q=n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Hodgestrukturen auf endlichdimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen bilden eine Kategorie. Die Morphismen sind hierbei diejenigen linearen Abbildungen $\alpha : L_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$, die die Hodgestrukturen respektieren, i. e.

$$\alpha(L^{p,q}) \subseteq M^{p,q}, \forall p, q.$$

(1.1.4) Zu einer Hodgestruktur vom Gewicht n auf $L_{\mathbb{Q}}$ definiert

$$(L^*)^{p,q} = (L^{-p,-q})^*$$

(d. h. $\alpha(L^{p',q'}) = 0$ für $\alpha \in (L^*)^{p,q}$ und alle $(p',q') \neq (-p,-q)$) die *duale Hodgestruktur* auf dem Dualraum $L^*_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ vom Gewicht $-n$.
Zu Hodgestrukturen auf $L_{\mathbb{Q}}$ und $M_{\mathbb{Q}}$ von Gewichten n bzw. m definiert

$$(L \otimes M)^{r,s} = \bigoplus_{\substack{p+p'=r \\ q+q'=s}} L^{p,q} \otimes M^{p',q'}$$

das *Tensorprodukt dieser Hodgestrukturen* auf $L_{\mathbb{Q}} \otimes M_{\mathbb{Q}}$ (vom Gewicht $n+m$).
Die induzierte Struktur auf $\mathrm{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, M_{\mathbb{Q}}) = L_{\mathbb{Q}} \otimes M^*_{\mathbb{Q}}$ ist dann vom Gewicht 0:

$$\mathrm{Hom}(L, M)^{r,s} = \left\{ f : L \to M \;\mid\; f(L^{p,q}) \subseteq M^{p+r,q+s} \right\}$$

und eine lineare Abbildung $f : L_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ ist genau dann ein Morphismus von Hodgestrukturen, wenn $f \in \mathrm{Hom}(L, M)^{0,0}$.
Sei $\mathbb{S} := R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. Die Hodgestrukturen auf $L_{\mathbb{Q}}$ stehen in 1:1 Korrespondenz mit Darstellungen $h : \mathbb{S} \to GL(L_{\mathbb{R}})$. Aus einem Morphismus h erhält man eine Hodgestruktur über die Gewichtsraumzerlegung

$$L^{p,q} = \{ v \in L_{\mathbb{C}} \;\mid\; h(z)v = z^q \overline{z}^p v \}.$$

Zu jeder Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ läßt sich umgekehrt eine solche Darstellung konstruieren. Die Bedingung $L^{p,q} = \overline{L^{q,p}}$ ist dabei äquivalent zur Definierbarkeit von h über $\mathbb{R}$.
Eine lineare Abbildung $\alpha : L_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ ist genau dann ein Morphismus von Hodgestrukturen, wenn $h_M(z) \circ \alpha = \alpha \circ h_L(z) \quad \forall z$, d. h. wenn α ein Morphismus von Darstellungen der Gruppe $\mathbb{S}$ ist.
Aus der Definition der obigen Korrespondenz folgt, dass die entsprechende Hodgestruktur genau dann vom Gewicht n ist, falls der zusammengesetzte Morphismus

$$w : \mathbb{G}_m \to \mathbb{S} \to GL(L_{\mathbb{R}})$$

durch

$$x \mapsto w(x) = x^n$$

gegeben ist. Dieser Morphismus heißt deshalb auch Gewichtsmorphismus. Man sagt auch, h ist vom Gewicht n, bzw. vom Typ $\cdots$, falls die korrespondierende Hodgestruktur vom Gewicht n, bzw. vom Typ $\cdots$ ist.

1.2 G-Strukturen

Seien für das weitere die folgenden Daten fest gewählt:

i. Eine reduktive algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe G.

ii. Eine treue Darstellung $\rho : G \to GL(V_{\mathbb{Q}})$ auf einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$.

Wir identifizieren G mit seinem Bild in $GL(V_{\mathbb{Q}})$.

(1.2.1) Definition. Sei $L_{\mathbb{Q}}$ ein weiterer $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Eine G-Struktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ ist eine Klasse von Isomorphismen

$$G(\mathbb{Q})\alpha \in G(\mathbb{Q})\backslash \operatorname{Iso}(L_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}}).$$

Eine Morphismus $\alpha : (L_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\alpha_L) \to (M_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\alpha_M)$ von Vektorräumen mit G-Struktur ist eine lineare Abbildung α, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L_{\mathbb{Q}} \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "G(\mathbb{Q})\alpha_L"] & \\
& V_{\mathbb{Q}} \\
M_{\mathbb{Q}} \arrow[ur, "G(\mathbb{Q})\alpha_M"'] &
\end{tikzcd}$$

(modulo $G(\mathbb{Q})$) kommutativ macht.

Sei $T = \{t_i\}$ eine endliche Familie von Tensoren auf $V_{\mathbb{Q}}$:

$$t_i \in V^{\otimes r_i} \otimes (V^*)^{\otimes s_i}.$$

Falls $G = \operatorname{Aut}(L_{\mathbb{Q}}, T)$ der Stabilisator dieser Familie T bzgl. der natürlichen Operation von $GL(L)$ auf Tensoren ist, so ist eine G-Struktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ äquivalent zur einer Menge von Tensoren T' auf $L_{\mathbb{Q}}$ desselben Typs. (d. h., es existiert ein Isomorphismus $\alpha : V_{\mathbb{Q}} \to L_{\mathbb{Q}}$ mit $\alpha T' = T$ - die Klasse $G(\mathbb{Q})\alpha$ ist dann gerade die Klasse aller solchen Morphismen).
Eine lineare Abbildung $\alpha : L_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ respektiert genau dann die G-Strukturen, falls $\alpha T' = T''$, wobei T' und T'' die zugehörigen Familien von Tensoren bezeichnen sollen.

(1.2.2) Definition. Eine Hodgestruktur auf L heißt mit der G-Struktur verträglich, falls die folgenden, äquivalenten Aussagen erfüllt sind:

i. Der Morphismus h faktorisiert über $(\alpha^{-1}G\alpha)_{\mathbb{R}}$[1].

ii. $t_i \in (V^{\otimes r_i} \otimes (V^*)^{\otimes s_i})^{0,0}$ für alle i.

[1] diese Gruppe ist unabhängig von der Wahl des Vertreters α.

Eine Hodgefiltrierung nennen wir mit der G-Struktur verträglich, falls dies für die zugehörige Hodgestruktur gilt.

Die Automorphismen eines Vektorraumes mit Hodgefiltrierung sind gegeben durch

$$\mathrm{Stab}(h, G(\mathbb{R})) \cap G(\mathbb{Q}).$$

(1.2.3) Bemerkung. Falls eine treue $\mathbb{Q}$-Darstellung $\rho : G \to GL(V_{\mathbb{Q}})$ einer reduktiven linearen algebraischen Gruppe gegeben ist, läßt sich immer eine Menge T von Tensoren finden, so dass $\rho(G)$ gerade der Stabilisator von T ist (siehe [4, I, §3]).

Die folgenden Beispiele zeigen in einigen wichtigen Fällen, wie man die obige 'abstrakte' Verträglichkeit der Hodgestruktur mit der G-Struktur interpretieren kann:

(1.2.4) Beispiel. $G = GSp$ sei die symplektische Ähnlichkeitengruppe bzgl. der symplektischen Standardform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{2g}$.

$$GSp(\mathbb{Q}) = \{g \in GL(V_{\mathbb{Q}}) \mid \langle gx, gy \rangle = \lambda_g \langle x, y \rangle\}$$

Eine G-Struktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ ist dann äquivalent zu einer symplektischen Form ϕ bis auf einen $\mathbb{Q}$-Skalar auf $L_{\mathbb{Q}}$. Sei eine Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ vom Gewicht n mit zugehöriger Darstellung $h : \mathbb{S} \to GSp$ gegeben.

(1.2.5) Lemma. Äquivalent sind:

i. $\phi \in (L_{\mathbb{Q}}^* \otimes L_{\mathbb{Q}}^*)^{-n,-n}$,

ii. ϕ ist invariant unter $h(U_1)$,

iii. der Morphismus h faktorisiert über $(\alpha^{-1} GSp \alpha)_{\mathbb{R}}$ bzw. $(\alpha^{-1} GO \alpha)_{\mathbb{R}}$,

iv. $L^{p,n-p} \perp L^{p',n-p'}$ für alle $p \neq n - p'$,

v. $F^p \perp F^{n-p+1}$.

Dieses Beispiel hängt mit dem Begiff der Polarisation einer Hodgestruktur eng zusammen, siehe 1.5.1.

Beweis. (i) bedeutet $\phi(h(z)v, h(z)w) = (z\overline{z})^n \phi(v, w)$. Dies ergibt sofort (ii) und (iii). Da die Hodgestruktur vom Gewicht n ist, operiert $h(r)$ bzgl. Multiplikation mit r^n für alle $r \in \mathbb{R}^*$. Falls nun ϕ invariant unter $h(U_1)$ ist, folgt $\phi(h(z)v, h(z)w) = (z\overline{z})^n \phi(v, w)$ für alle z. Aus (iii) folgt sofort (ii), da h vom Gewicht n ist. ($g \mapsto \lambda_g$ definiert einen algebraischen Homomorphismus $\lambda : GSp$ (bzw. GO) $\to \mathbb{G}_m$ - die Zusammensetzung $\lambda \circ h$ muß daher auf U_1 verschwinden, d. h. die Form ist invariant unter U_1)

(iii)$\Rightarrow$(iv): Sei $v \in L^{p,n-p}$ und $w \in L^{p',n-p'}$, $p \neq n-p'$ gegeben. Es ist dann $\phi(h(z)v, h(z)w) = (z\overline{z})^n \phi(v,w) = z^{p+p'}\overline{z}^{n-p-p'}\phi(v,w)$ für alle z. Daraus folgt $\phi(v,w) = 0$. Die Umkehrrichtung ist ebenfalls klar. Die Äquivalenz mit (v) folgt aus der Korrespondenz zwischen Hodgestrukturen und Hodgefiltrierungen. $\square$

(1.2.6) Beispiel. Sei F ein Zahlkörper und $G = F^x$ $(:= R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)$ operiere auf $V_{\mathbb{Q}} = F$ in der Standarddarstellung. Es gilt dann[2]:

$$V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{\rho: F \to \mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\rho)}.$$

Eine G-Struktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ ist äquivalent zu einer F-Vektorraumstruktur.

(1.2.7) Lemma. Äquivalent sind:

i. $x \in (L_{\mathbb{Q}} \otimes L_{\mathbb{Q}}^*)^{0,0}$ für alle $x \in F$,

ii. der Morphismus h faktorisiert über $(\alpha^{-1}F^x\alpha)_{\mathbb{R}}$,

iii. für alle ρ ist $\mathbb{C}^{(\rho)} \subseteq L^{p,q}$ für bestimmte von ρ abhängige p, q.

Dieses Beispiel ist für den Begriff des CM-Typs von abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation wichtig, siehe 2.3.

$\mathbb{Z}$-Strukturen

Eine $\mathbb{Z}$-Hodgestruktur besteht aus einer Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{Q}}$ und einem vollständigen Gitter $L_{\mathbb{Z}} \subset L_{\mathbb{Q}}$. Von einem Morphismus von $\mathbb{Z}$-Hodgestrukturen $\beta : L_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ wird verlangt, dass $\beta(L_{\mathbb{Z}}) = M_{\mathbb{Z}}$ erfüllt ist.
Wir wählen zusätzlich ein Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ und bezeichnen

$$G(\mathbb{Z}) := \{g \in G(\mathbb{Q}) \mid gV_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}\}.$$

Eine G-Struktur auf $L_{\mathbb{Z}}$ ist dann eine Klasse von Isomorphismen $G(\mathbb{Z})\alpha \in G(\mathbb{Z})\backslash \operatorname{Iso}(L_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}})$. Es ist dann klar, was eine $\mathbb{Z}$-Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{Z}}$ mit G-Struktur ist. Die Automorphismen einer solchen Struktur sind gegeben durch $\operatorname{Stab}(h, G(\mathbb{R})) \cap G(\mathbb{Z})$.

1.3 Level-Strukturen

Die Situation sei wie oben: G, reduktiv, operiere treu auf einem Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$. Für jede $\mathbb{Q}$-Algebra B operiert G dann auch auf $V_B := V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} B$. Mit jedem Vektorraum $L_{\mathbb{Q}}$ mit G-Struktur wird auch L_B zu einem (freien) B-Modul mit G-Struktur.
Sei $B = \mathbb{A}_f$, sowie K eine kompakt offene Untergruppe von $G(\mathbb{A}_f)$ und L ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit G-Struktur.

[2] $\mathbb{C}^{(\rho)}$ bedeutet, dass $\mathbb{C}$ seine F-Modulstruktur durch Multiplikation mit $\rho(x), x \in F$ erhält.

(1.3.1) Definition. Eine K-Level-Struktur ist eine Klasse mod K

$$\xi K : V_{\mathbb{A}_f} \to L_{\mathbb{A}_f}$$

von Isomorphismen von Moduln mit G-Struktur.

Seien nun zusätzlich Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ und $L_{\mathbb{Z}} \subset L_{\mathbb{Q}}$ gegeben. Es gibt dann eine natürliche Zahl $M = \operatorname{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})$ mit den Eigenschaften:

i. Es existiert ein Gruppenschema $G_{Z[1/M]}$ über $\mathbb{Z}[1/M]$ mit

$$G \cong G_{\mathbb{Z}[1/M]} \times_{\mathbb{Z}[1/M]} \mathbb{Q},$$

ii. die Darstellung ρ ist über $\mathbb{Z}[1/M]$ definiert und

iii. für alle $p \not| M$ ist die Reduktionsabbildung

$$G(\mathbb{Z}_p) \to G(\mathbb{F}_p)$$

surjektiv.

In den meisten Fällen existieren spezielle Gitter $V_{\mathbb{Z}}$, für die man $\operatorname{ind}(G, V_{\mathbb{Z}}) = 1$ wählen kann. Sei N eine natürliche Zahl mit $(N, \operatorname{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})) = 1$. $G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ operiert dann auf $V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ und $L_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ wird (in diesem Sinne) zu einem (freien) $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-Modul mit G-Struktur.

(1.3.2) Definition. Eine Level-N-Struktur $((N, \operatorname{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})) = 1)$ ist ein Isomorphismus

$$\gamma : V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \to L_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

von Moduln mit G-Struktur.
Für ein N mit $(N, \operatorname{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})) \neq 1$ fordern wir, dass γ von einem Isomorphismus

$$\xi : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \to L_{\widehat{\mathbb{Z}}}$$

von Moduln mit G-Struktur induziert wird.

Wir betrachten die Kategorie der G-Hodgestrukturen auf $V_{\mathbb{Q}}$ bzw. $V_{\mathbb{Z}}$ zusammen mit einer Level-N- bzw. K-Level-Struktur. Die Automorphismen dieser Objekte sind dann gerade gegeben durch

$$G(\mathbb{Z}, N) \cap \operatorname{Stab}(h, G(\mathbb{R})),$$

$(G(\mathbb{Z}, N) := \{g \in G(\mathbb{Z}) \mid g \equiv 1 \mod NV_{\mathbb{Z}}\})$ bzw.

$$G(\mathbb{Q}) \cap (\operatorname{Stab}(h, G(\mathbb{R})))K$$

(Schnitt in $G(\mathbb{A})$ gebildet).

1.4 Familien von Hodgestrukturen

Sei wiederum $L_{\mathbb{Q}}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit G-Struktur.

(1.4.1) Definition. Eine holomorphe Familie von Hodgefiltrierungen auf $L_{\mathbb{Q}}$ über einem analytischen Raum B ist eine Filtrierung der Garbe

$$L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_B$$

durch lokal-freie $\mathcal{O}_B$-Modulgarben $\mathcal{F}^p$ so dass für jeden Punkt $p : \{\cdot\} \to B$, $\{p^*\mathcal{F}^q\}$ eine Hodgefiltrierung auf $L_{\mathbb{Q}}$ ist. Sie heißt mit der G-Struktur verträglich, falls dies punktweise gilt.

Man kann diese Bedingungen zu einer einzigen zusammenfassen:

$$\mathcal{F}^p \otimes_{\mathcal{O}_B} C_B^\infty \oplus \overline{\mathcal{F}^q \otimes_{\mathcal{O}_B} C_B^\infty} = L_B \otimes_{\mathbb{Q}_B} C_B^\infty$$

für alle $p + q = n - 1$. Doch ist dies umständlich, da die komplexe Konjugation nicht auf holomorphen Unterbündeln operiert.
Man kann auch eine zugehörige Hodgestruktur der C^∞-Garbe $L_B \otimes_{\mathbb{Q}_B} C_B^\infty$ definieren, doch ist diese natürlich nicht holomorph, falls die Filtrierung holomorph ist.
Ein Morphismus von Familien von Holgefiltrierung auf $L_{\mathbb{Q}}$ nach $M_{\mathbb{Q}}$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen mit G-Struktur von $L_{\mathbb{Q}}$ nach $M_{\mathbb{Q}}$, der die Hodgefiltrierungen ineinander überführt.
Sei X eine $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Morphismen $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$. Der Einfachheit halber nehmen wir hier und im folgenden an, dass alle $h \in X$ vom Gewicht n sind. Alles funktioniert sinngemäß für gemischte Gewichte, falls wir erstens fordern, dass die Gewichtsmorphismen w_h (siehe 1.1) für alle $h \in X$ gleich sind (dies ist äquivalent dazu, dass die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad} \circ h$ auf $\mathrm{Lie}(G)$ vom Gewicht 0 ist - siehe [3, 1.1.13]), und zweitens, dass der Gewichtsmorphismus über $\mathbb{Q}$ definiert ist (SV4). Dies führt zu einer festen Zerlegung von $V_{\mathbb{Q}}$ in Bestandteile konstanten Gewichts.
Wir betrachten den kontravarianten Funktor:

$$H(G,X)(B) := \left\{ \{\mathcal{F}^q\} \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \{p^*\mathcal{F}^q\} \text{ ist eine Hodgefiltrierung vom Gewicht } n \text{ auf } L \text{ für alle} \\ p : \{\cdot\} \to B \text{ und der zugehörige Morphismus } h \\ \text{faktorisiert über } \alpha^{-1}G(\mathbb{R})\alpha \text{ und liegt in } \alpha^{-1}X\alpha. \end{array} \right\}$$

Einer Abbildung $\gamma : B \to C$ ordnet dieser Funktor den Pullback γ^* zu, d. h. der Filtrierung $\{\mathcal{F}^p\}$ von $L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_C$ wird die Filtrierung $\{\gamma^*\mathcal{F}^p\}$ von $L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_B$ zugeordnet.

(1.4.2) Bemerkung. Die Definition impliziert insbesondere, dass der Typ der Hodgestrukturen nicht vom Punkt p abhängt, die induzierten Abbildungen

$$p^*\mathcal{F}^{q+1} \to p^*\mathcal{F}^q$$

sind somit alle injektiv und die obige Filtrierung induziert auch eine Filtrierung der assoziierten holomorphen Vektorbündel.

(1.4.3) Bemerkung. Die Dualität zwischen Hodgestrukturen auf $L_{\mathbb{Q}}$ und $L_{\mathbb{Q}}^*$ überträgt sich auf eine Dualität zwischen holomorphen Familien von Hodgefiltrierungen auf $L_{\mathbb{Q}}$ über B und solchen auf $L_{\mathbb{Q}}^*$.
In der Tat gilt punktweise

$$(F^*)^i = (F^{1-i})^{\perp}$$

nach Definition 1.1.2 und die Familie $\mathcal{F}^{1-i}$ besitzt lokal eine holomorphe Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$, die sich lokal zu einer holomorphen Basis $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m\}$ von $L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_U$ ergänzen läßt. Die duale Basis ist dann ebenfalls holomorph und die Menge $\{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ ist eine holomorphe Basis für $(\mathcal{F}^*)^i$.

Sei ein h_0 aus X gewählt, mit der zugehörigen Filtrierung $\{F_0^p\}$ auf $L_{\mathbb{C}}$.

(1.4.4) Satz. Der Funktor $H(G, X)$ wird durch den analytischen Raum $X \cong G(\mathbb{R})/K$ dargestellt, wobei K der Stabilisator von $h_0 \in X$ ist. Er erhält seine analytische Struktur durch die offene Einbettung $G(\mathbb{R})/K \to G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$. Dabei ist P, der Stabilisator der Filtrierung $\{F_0^p\}$, eine parabolische Untergruppe von $G_{\mathbb{C}}$.

Beweis. Sei eine Filtrierung $\{\mathcal{F}^q\}$ von $L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_B$ gegeben. Lokal existiert dann ein Automorphismus γ von $L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_U$, so dass $\gamma(\{\mathcal{F}^q|_U\}) = \{F_0^q \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U\}$ (wähle lokale Basen, siehe auch Bemerkung 1.4.2). Diese entspricht einem Morphismus $U \to GL(L_{\mathbb{C}})$, denn der Funktor

$$B \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_B}(L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_B)$$

wird dargestellt durch den analytischen Raum $GL(L_{\mathbb{C}})$.
Die Automorphismen unterscheiden sich dabei auf den Schnitten $U_{ij} = U_i \cap U_j$ einer geeigneten Überdeckung um ein

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{O}_{U_{ij}}}(L_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}_{U_{ij}}, \{F_0^q \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{U_{ij}}\}).$$

Dies entspricht einem Morphismus

$$U_{ij} \to \widetilde{P}(\mathbb{C}),$$

falls $\widetilde{P}$ der Stabilisator von $\{F_0^q\}$ in $GL(L_{\mathbb{C}})$ ist. Somit sind die induzierten Abbildungen

$$U_{ij} \to GL(L, \mathbb{C})/\widetilde{P}(\mathbb{C})$$

gleich und obige Abbildungen verkleben sich zu einem Morphismus

$$\alpha : B \to GL(L, \mathbb{C})/\widetilde{P}(\mathbb{C}).$$

Betrachte nun die Abbildung

$$G(\mathbb{R})/K \hookrightarrow G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL(L_{\mathbb{C}})/\widetilde{P}(\mathbb{C}),$$

wobei P der Stabilisator von $\{F_0^q\}$ in G ist und K wie oben. Beide Abbildungen sind injektiv. Erstere, da die Hodgefiltrierungen die Hodgestrukturen und damit die Morphismen h eindeutig bestimmen. Letztere ist nach Konstruktion injektiv.
Das Bild der Abbildung α ist im Bild dieser zusammengesetzen Abbildung enthalten (nach Definition des Funktors), läßt sich also als analytischer Morphismus $B \to G(\mathbb{R})/K$ bzgl. der durch die erste Abbildung induzierten komplexen Struktur auffassen. Dazu beachte man, dass die rechte Abbildung eine abgeschlossene Einbettung ist, da beide Räume kompakt sind (die Eigenschaft für P und $\widetilde{P}$ parabolisch zu sein, wird gleich ersichtlich) und die erstere eine offene Einbettung. Um dies zu sehen, zeigen wir, dass die Einbettung auf den Liealgebren einen Isomorphismus induziert:
Aus der Zerlegung $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ über $\mathbb{C}$ erhalten wir aus h_0 einen Morphismus $\mu_h : \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{C}}$ via der die Einbettung des ersten Faktors. Seien $\{L_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ die Gewichtsräume. Es gilt nach Definition $F_0^p = \bigoplus_{p\leq z} L_z$. Die Liealgebra $\mathrm{Lie}(G,\mathbb{C}) \subset \mathrm{End}(L_{\mathbb{C}})$ operiert auf L und wir haben:

$$\mathrm{Lie}(P,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Lie}(G,\mathbb{C}) \mid AF_0^p \subseteq F_0^p\}\,.$$

Sei nun ein maximaler $\mathbb{R}$-Torus T in G gewählt, so dass h über T faktorisiert. μ_h wird beschrieben durch eine Abbildung $\mu_h^* : X^*(T) \to X^*(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$. Es gilt ferner für einen Gewichtsraum $L_\alpha \subseteq L_{\mu_h^*\alpha}$ und für alle $A \in \mathfrak{g}_\beta, \beta \in \triangle$[3]:

$$AL_\alpha \subseteq L_{\alpha+\beta},$$

somit ist der Stabilisator

$$\mathrm{Lie}(P,\mathbb{C}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mu_h^{*-1}\mathbb{N}_0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Für K gilt:

$$\mathrm{Lie}(K,\mathbb{R}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in h^{*-1}(0,0)} \mathfrak{g}_\alpha)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})}.$$

Somit haben beide diesselbe reelle Kodimension. Außerdem enthält $\mu_h^{*-1}\mathbb{N}_0$ ein System positiver Wurzeln für eine geeignete Anordnung, P ist also parabolisch.
Umgekehrt führt ein Morphismus $B \to G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$ zu einer Filtrierung von

$$L_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_B,$$

die die geforderten Eigenschaft hat. □

(1.4.5) Bemerkung. Obiger Quotient $G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$ ist kompakt. Man nennt diese Varietäten auch verallgemeinerte Flagvarietäten, da sie den Modulraum aller Filtrierungen (mit G-Struktur verträglich) darstellen. Das Bild obiger Einbettung entspricht denjenigen Filtrierungen, die die Hodgebedingung erfüllen. Falls $G(\mathbb{R})$ ebenfalls kompakt ist, folgt, dass die Einbettung $G(\mathbb{R})/K \hookrightarrow G(\mathbb{C})/P(\mathbb{C})$ bijektiv ist - dieser Fall wird aber nicht auftreten.

Der wichtige Spezialfall der Siegelschen oberen Halbräume wird in Abschnitt 1.8 untersucht.

[3] $\triangle$ = das Wurzelsystem in $\mathrm{Lie}(G,\mathbb{C})^*$ bzgl. T, $\mathfrak{g}_\beta$ = der zugehörige Gewichtsraum in $\mathrm{Lie}(G,\mathbb{C})$.

1.5 Polarisation

(1.5.1) Definition. Sei $\phi \in L^*_{\mathbb{Q}} \otimes L^*_{\mathbb{Q}}$. Eine Hodgestruktur vom Gewicht n heißt polarisiert bzgl. ϕ, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i. $\phi \in (L^*_{\mathbb{Q}} \otimes L^*_{\mathbb{Q}})^{-n,-n}$.

ii. $\phi(v, h(i)w)$ ist symmetrisch und positiv definit.

Bemerkung: Die 1. Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn ϕ invariant unter $h(U_1)$ ist. Aus beiden Bedingungen zusammen folgt insbesondere

$$\phi(v,w) = \phi(h(i)v, h(i)w) = \phi(w, h(i)^2 v) = (-1)^n \phi(w,v),$$

i. e. ϕ ist alternierend, falls n ungerade und im anderen Fall symmetrisch.
$C := h(i)$ läßt sich nur in Termen der Hodgestruktur angeben durch die Operation

$$Cv = i^{p-q}v \qquad \forall v \in L^{p,q}$$

und wird Weiloperator genannt.
Insbesondere folgt für eine symmetrische bzw. alternierende Form ϕ (je nach Parität von n), dass die Hodgestruktur genau dann polarisiert ist, wenn h über $GSp(\phi)$ bzw. $GO(\phi)$ faktorisiert und (ii) gilt. (Für weitere äquivalente Bedingungen, siehe 1.2.4.) Wir beschränken uns hier auf den Fall n gerade, d. h. $G = GSp$ und werden gleich sehen, dass alle solchen Morphismen (desselben Typs) in dieser Gruppe über $\mathbb{R}$ konjugiert sind.

GSp

Sei die symplektische Standardform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{2g}$ gewählt. Es ist dann

$$GSp(F) = \left\{ X \in GL_{2g}(F) \mid {}^tXJX = \lambda_X J \right\}$$

für alle $\mathbb{Q}$-Algebren F und

$$J = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\lambda : X \to \lambda_X$ ist ein Homomorphismus algebraischer Gruppen, deren Kern die symplektische Gruppe ist:

$$0 \longrightarrow Sp \longrightarrow GSp \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0.$$

Hieraus erhält man insbesondere $H^1(F, GSp) = 1$, da $H^1(F, Sp) = 1$; dies ist gleichbedeutend zur Äquivalenz aller symplektischen Formen über F (siehe [17, Prop. 2.7, p.71]).
Insbesondere gilt $H^1(\mathbb{R}, GSp) = 1$. Es gibt den maximalen $\mathbb{R}$-Torus

$$D = \{ \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_{g+1} & & \\ & & & & d_{g+2} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} | d_1 d_{g+1} = \cdots = d_g d_{2g} = \lambda_d \}.$$

Die Weylgruppe dieses Torus permutiert die Diagonaleinträge und ist gerade die Fixgruppe der Bedingung $d_1 d_{g+1} = \cdots = d_2 d_{g+2}$, i. e.

$$W(D) \cong S_g \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g.$$

(S_g operiert durch Permutation der Paare $\{d_i, d_{i+g}\}$ und die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch Vertauschen von d_i und d_{i+g}.)
Sei nun ein Morphismus $h : \mathbb{S} \to GSp$ gegeben, mit der Eigenschaft, dass die zugehörige Hodgestruktur bzgl. der Form polarisiert ist. Wähle einen maximalen $\mathbb{R}$-Torus T, über den h faktorisiert. Es gilt dann:

(1.5.2) Lemma.

i. Die $\mathbb{R}$-Konjugationsklasse des Torus T ist vom Typ $\{\rho \mapsto \mathrm{id} \times \{-1, \ldots, -1\}\}$ in $H^1(\mathbb{R}, W(D))$ (siehe A.1) und es gibt nur eine $\mathbb{R}$-Konjugationsklasse solcher Tori.

ii. Über einen Torus dieses Typs faktorisiert bis auf Konjugation mit Elementen aus $N(T, \mathbb{R})$ nur ein polarisierter (d. h. zu einer Polarisation führender) Morphismus von einem festen Typ.

Den Beweis stellen wir für einen Moment zurück. Aus diesen Fakten folgt sofort:

(1.5.3) Korollar. Alle Morphismen h vom selben Typ, die zu einer Polarisation führen, sind in GSp konjugiert.

Die $\mathbb{R}$-Konjugationsklasse solcher Morphismen bezeichnen wir mit X_{pol}^{-1} für den Typ $(-1, 0), (0, -1)$ bzw. $X_{pol}^{\cdots}$, für einen beliebigen Typ $\cdots$. Diese Konjugationsklassen enthalten dann ebenfalls alle Morphismen, bzgl. derer die Form $\phi(\cdot, h(i)\cdot)$ negativ definit ist.

Beweis des Lemmas. Der Torus T ist über $\mathbb{C}$ konjugiert zum Diagonaltorus

$$\begin{tikzcd} h : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & T_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\mathrm{int}(\gamma)"] & \subset & GSp_{\mathbb{C}} \arrow[d, "\mathrm{int}(\gamma)"] \\ & D & \subset & GSp_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges $v \in V_{\mathbb{R}}$ schreibe $\gamma v = \sum \mu_i e_i$. Es ist nach Voraussetzung

$$\langle v, h(i)v \rangle \ > 0.$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
\langle v, h(z)v\rangle &= d_\gamma^{-1}\langle \gamma v, \gamma h(z)\gamma^{-1}\gamma v\rangle \\
&= d_\gamma^{-1}\langle \gamma v, \begin{pmatrix} z^{p_1}\overline{z}^{n-p_1} & & & & & \\ & z^{p_2}\overline{z}^{n-p_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & z^{n-p_1}\overline{z}^{p_1} & & \\ & & & & z^{n-p_2}\overline{z}^{p_2} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \gamma v\rangle \\
&= d_\gamma^{-1}\sum \mu_i\mu_{i+g}(z^{p_i}\overline{z}^{n-p_i} - z^{n-p_i}\overline{z}^{p_i}).
\end{aligned}$$

(Man beachte dazu, dass der $\mathbb{R}$-Morphismus $\mathbb{S} \xrightarrow{h} GSp \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_m$ durch $z \mapsto (z\overline{z})^n$ gegeben ist.) Es ist außerdem

$$\sum \overline{\mu_i} e_i = \overline{\gamma v} = (\overline{\gamma}\gamma^{-1})\gamma v = \sum \mu_i\beta_i e_{\sigma(i)} \qquad (\text{da } \overline{\gamma}\gamma^{-1} \in N(D))$$

$$\Rightarrow \quad \langle v, h(i)v\rangle = d_\gamma^{-1}\sum_{i=1}^{g} \mu_i\overline{\mu_{\sigma(i+g)}}\,\overline{\beta_{i+g}}\, i^{p_i-q_i} > 0.$$

Daraus liest man ab:

i. $\sigma(i+g) = i,\ \forall\ 1 \le i \le g$ (Die erste Aussage von (i))

ii. $i^{p_i-q_i}\beta_i > 0\ \forall i \le g$ oder $i^{p_i-q_i}\beta_i < 0\ \forall i \le g$ (Fall durch d_γ bestimmt). In diesem Fall ist $i^{p_i-q_i} = -i^{q_i-p_i}$ ($n = p_i + q_i$ ist ungerade) und daraus folgt, dass es bis auf Permutation in $S_g \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nur einen solchen Morphismus vom selben Typ geben kann.

Es fehlt also zu zeigen: Es gibt nur eine Konjugationsklasse von Tori dieses Typs und die Permutationen in $S_g \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ haben Repräsentanten in $N(T,\mathbb{R})$. Betrachte dazu die exakte Sequenz punktierter Mengen:

$$N(T,\mathbb{R}) \longrightarrow W(T,\mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R},T) \xrightarrow{0} H^1(\mathbb{R},N(T)) \longrightarrow H^1(\mathbb{R},W(T))$$

Dabei ist $W(T,\mathbb{R}) \cong W(D,\mathbb{R}) \cong S_g \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ und $H^1(\mathbb{R},T) = (\mathbb{R}^*/N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{C}^*)^g/\mathbb{R}^* = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g/\mathbb{Z}$. Man kann nachrechnen, dass δ hier gerade die Identifikaton des $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$-Anteils + Projektion ist. Aus der Exaktheit bei $H^1(\mathbb{R},N(T))$ folgt dann die erste fehlende Aussage und aus der bei $W(T,\mathbb{R})$ die zweite. □

(1.5.4) Korollar. Für den Typ $(-1,0),(0,-1)$[4] (komplexe Strukturen) folgt speziell: Über einen maximalen $\mathbb{R}$-Torus faktorisiert höchstens ein polarisierter Morphismus h dieses Typs.

[4] d. h. $\dim(L^{-1,0}) = \dim(L^{0,-1}) = g$

1.6 Hermitesch symmetrische Bereiche

(1.6.1) Definition. Ein $\theta \in \mathrm{Aut}(G, \mathbb{R})$, mit $\theta^2 = \mathrm{id}$ heißt Cartan-Involtution, falls

$$G_\theta = \left\{ h \in G(\mathbb{C}) \mid h = \overline{h}^\theta \right\}$$

eine kompakte reelle Form von $G(\mathbb{R})$ ist.

Eine algebraische Gruppe besitzt genau dann eine Cartan-Involution, wenn sie reduktiv ist. In diesem Falle sind alle Cartan-Involutionen konjugiert (siehe [7]).

(1.6.2) Satz. Sei G (abweichend) halbeinfach und $\theta \in \mathrm{Aut}(G, \mathbb{R})$. Es sind dann äquivalent:

i. θ ist eine Cartan-Involution von G.

ii. $\mathrm{Stab}(\theta, G(\mathbb{R}))$ ist eine maximal kompakte Untergruppe vom $G(\mathbb{R})$.

iii. Für die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G, \mathbb{R})$ und deren (bzgl. der Killing-Form B orthogonalen) Eigenraumzerlegung bzgl. θ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$$

ist die Einschränkung von B auf $\mathfrak{g}^+$ negativ definit, sowie auf $\mathfrak{g}^-$ positiv definit.

iv. $-B(X, \theta Y)$ ist positiv definit.

Beweis. Eine reelle halbeinfache Gruppe ist genau dann kompakt, wenn die Killingform negativ definit ist. Ferner gilt: $\mathrm{Lie}(G_\theta) = \mathfrak{g}^+ \oplus i\mathfrak{g}^-$. □

Falls ein innerer Automorphismus von G eine Cartan-Involution ist, sind G und seine kompakten Form *innere* Formen voneinander.

(1.6.3) Definition. Ein hermitesch symmetrischer Raum X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer positiv definiten hermiteschen Metrik g, mit der folgenden Bedingung: Zu jedem Punkt $p \in X$ existiert eine Automorphismus s_p (d. h. holomorph und isometrisch) von X mit Fixpunkt p und $T_p(s_p) = -1$.

(1.6.4) Satz. i. Ein hermitesch symmetrischer Raum ist homogen, d. h. zu jedem Paar von Punkten p_1 und p_2 gibt es einen Automorphismus γ mit $\gamma(p_1) = p_2$.

ii. $X = X^0 \times X^- \times X^+$ mit

X^+ von 'kompaktem Typ' mit positiver Krümmung,

X^- von 'nicht kompaktem Typ' mit negativer Krümmung,

X^0 euklidisch, d. h. $\cong \mathbb{C}^n$.

Beweis. siehe [7, Chapter VIII, §4] □

(1.6.5) Definition. Ein hermitesch symmetrischer Raum von 'nicht kompaktem Typ' heißt hermitesch symmetrischer Bereich.

Der Name kommt daher, dass jeder hermitesch symmetrische Bereich X eine Einbettung als ein offenes Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ zulässt. Z. B. hat man für die obere Halbebene einen Isomorphismus

$$H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \xrightarrow[-i\frac{z+1}{z-1} \leftarrow z]{z \mapsto \frac{z-i}{z+i}} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} .$$

Die oberen Halbebene H^+ wird zu einem hermiteschen symmetrischen Raum durch die hermitesche Metrik

$$\frac{1}{\Im(z)^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z}.$$

Die gebrochen rationalen Transformation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \tag{1}$$

sind Automorphismen der oberen Halbebene, die insbesondere auch die geforderten Symmetrien s_p liefern.

(1.6.6) Satz. Zu jedem Punkt p eines hermitesch symmetrischen Raumes X existiert eine Abbildung

$$u_p : U_1 \to \mathrm{Aut}(X),$$

die den Punkt p festläßt und auf dem Tangentialraum T_p durch Multiplikation mit z operiert.

Beweis. siehe [13, Theorem 1.9]. □

Zum Beispiel hat man für den Punkt $i \in H^+$ die Gruppe

$$U_1 \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \middle| \quad a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

die wie in (1) operiert. Alle anderen Abbildungen entstehen hieraus durch Konjugation.

(1.6.7) Lemma. Sei G (abweichend) eine zusammenhängende reelle lineare algebraische Gruppe, mit $G(\mathbb{R})$ kompakt. Sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $V_\mathbb{C}$ gegeben, auf dem $G_\mathbb{C}$ operiert. Es gibt dann eine $G(\mathbb{C})$-invariante positiv definite hermitesche Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V_\mathbb{C}$, d. h. es ist

$$\langle gv, \overline{g}w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall \ g \in G(\mathbb{C}), v, w \in V_\mathbb{C}$$

Beweis. Sei ϕ eine beliebige positiv definite hermitesche Form auf $V_{\mathbb{C}}$. Die Form

$$\langle v, w\rangle := \int_{G(\mathbb{R})} \phi(gv, gw)dg$$

(bzgl. eines Haarschen Maßes auf $G(\mathbb{R})$) ist wiederum positiv definit. Ferner gilt

$$\langle v, w\rangle = \langle gv, \overline{g}w\rangle \quad \forall \ g \in G(\mathbb{R}), v, w \in V.$$

und da diese Gleichung nichts anderes als eine Identität von polynomialen Ausdrücken sein kann, folgt sogar die $G(\mathbb{C})$-Invarianz, denn $G(\mathbb{R})$ ist Zariski-dicht in G, da G zusammenhängend ist. □

(1.6.8) Satz. Sei $h(\mathbb{R}^*)$ zentral (z. B. sei h vom Gewicht n) und sei

(SV1) $\mathrm{Ad}(h(i))$ eine Cartan-Involution von G^{ad} für ein (alle) $h \in X$.

erfüllt[5].

i. X besitzt eine G-invariante hermitesche Metrik und ist bzgl. dieser disjunkte Vereinigung von hermitesch symmetrischen Räumen.

ii. Es existiert eine Bilinearform ϕ auf $V_{\mathbb{R}}$, so dass die Hodgefiltrierungen in X^+ bzgl. ϕ polarisiert sind.

Beweis. 1. Das Bild K' von $K = \mathrm{Stab}(h_0, G(\mathbb{R}))$ in $G^{ad}(\mathbb{R})$ ist kompakt
(es ist in $\mathrm{Stab}(h_0(i), G^{ad}(\mathbb{R}))$ enthalten) und die Operation von K auf $T_{h_0}X$ faktorisiert über K', da $Z(\mathbb{R})$ trivial operiert. Es existiert daher nach Lemma 1.6.7 eine K' und somit K-invariante hermitesche Metrik auf $T_{h_0}X$. Diese Form wird durch die transitive Operation von $G(\mathbb{R})$ auf X ausgedehnt. $\mathrm{Ad}(h(i))$ operiert ferner durch Multiplikation mit -1 auf T_{h_0}, ist also eine Symmetrie bei h_0. Wiederum durch Translation erhalten wir Symmetrien an allen Punkten.
2. Schreibe $C := h(i)$. Betrachte die Sequenz

$$1 \to Z' \to G^{der} \to G^{ad} \to 1$$

wobei $Z' = G^{der} \cap Z$ eine endliche Gruppe ist. Daraus folgt, dass $\mathrm{Ad}(h(i))$ eine Cartan-Involution von G^{der} ist. Nach Lemma 1.6.7 existiert eine $G^{der,Ad(h(i))}(\mathbb{C})$-invariante, positiv definite hermitesche Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V, d. h. es gilt

$$\langle gv, C^{-1}\overline{g}Cw\rangle = \langle v, w\rangle$$

bzgl. $g \in G^{der}(\mathbb{C})$. Durch Ersetzen ($w \mapsto C^{-1}w$) erhalten wir

$$\langle gv, C^{-1}\overline{g}w\rangle = \langle v, C^{-1}w\rangle,$$

[5]Ich übernehme die Nummerierung der Axiome von [13].

also insbesondere die $G^{der}(\mathbb{R})$-Invarianz der Form $\langle\cdot, C^{-1}\cdot\rangle$. Die Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kann so gewählt werden, dass die Einschränkung auf $V_{\mathbb{R}}$ reell und invariant unter $h_0(U_1)$ (kompakt) ist. Dann ist auch $\phi(\cdot,\cdot) := \langle\cdot, C^{-1}\cdot\rangle$ reell, bilinear und polarisiert alle Hodgestrukturen in X^+, denn erstens ist ϕ invariant unter $h_0(U_1)$, daher wegen der G^{der} Invarianz auch invariant unter $h(U_1)$ für alle $h \in X$. $(G^{der})^+$ operiert transitiv auf X^+, deshalb gilt auch Bedinung (ii) einer Polarisation für alle $h \in X^+$. (für h_0 ist dies die Positiv-Definitheit der Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$). □

(1.6.9) Korollar. Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\text{(SV5) } Z(\mathbb{Q}) \text{ ist diskret in } Z(\mathbb{A}_f)$$

folgt dann, dass die Automorphismengruppen der Hodgestrukturen (siehe 1.3)

$$G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Stab}(h, G(\mathbb{R})) \cdot K$$

endlich sind.

Beweis. Erstens ist $\mathrm{Stab}(h, G^{ad}(\mathbb{R}))$ kompakt, denn es ist eine Untergruppe der maximal kompakten Gruppe $\mathrm{Stab}(h(i), G^{ad})$. Somit ist die Untergruppe von $G^{ad}(\mathbb{A})$,

$$G^{ad}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Stab}(h, G^{ad}(\mathbb{R})) \cdot p(K)$$

endlich. Der Kern der Abbildung

$$G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Stab}(h, G(\mathbb{R})) \cdot K \xrightarrow{p} G^{ad}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Stab}(h, G^{ad}(\mathbb{R})) \cdot p(K)$$

ist gerade

$$Z(\mathbb{Q}) \cap Z(\mathbb{R})(K \cap Z(\mathbb{A}_f))$$

Da $K \cap Z(\mathbb{A}_f)$ in $Z(\mathbb{A}_f)$ kompakt ist, und nach Annahme $Z(\mathbb{Q})$ diskret, folgt die Behauptung. □

Für die Gruppen $G(\mathbb{Z}, N) \cap \mathrm{Stab}(h, G(\mathbb{R}))$ folgt dies dann ebenfalls, siehe 1.10.

(1.6.10) Satz. Die Bedingung (ii) von Satz 1.6.8 ist hinreichend für (SV1), falls G keine Untergruppen besitzt, über die sämtliche $h \in X^+$ faktorisieren.

Beweisskizze. Die Form ϕ ist invariant unter allen $h(U_1)$ für $h \in X^+$, daher auch unter der kleinsten Gruppe G', über die alle $h|_{U_1}, h \in X^+$ faktorisieren. Die Form erweitert zu einer G' invarianten Sesquilinearform auf $V_{\mathbb{C}}$. Die Form $\phi(\cdot, h(i)\cdot)$ ist dann ${G'}^{Ad(h(i))}$ invariant und da sie symmetrisch und positiv definit ist, ist ${G'}^{Ad(h(i))}(\mathbb{R})$ kompakt, $Ad(h(i))$ also eine Cartan-Involution von G'. Die Abbildung $G' \to G^{ad}$ hat endlichen Quotienten, da $h(\mathbb{R}^*)$ zentral ist und $G(\mathbb{R})$ durch $h(\mathbb{R}^*)$ und $G'(\mathbb{R})$ erzeugt wird. Daher ist $\mathrm{Ad}(h(i))$ eine Cartan-Involution von G^{ad}. □

1.7 Transversalität

(1.7.1) Satz. Sei h vom Gewicht n und wiederum $\mathrm{Ad}(h(i))$ eine Cartan-Involtution von $\mathrm{Ad}(G)$ (SV1). Folgende Aussagen sind äquivalent

i. Der Morphismus $u_h(z/\overline{z})$ (u_h wie in 1.6.6) stimmt für alle $z \in \mathbb{C}^*$ mit $Ad(h(z))$ überein.

ii. Die Hodgestruktur induziert durch ein $h \in X$ auf $\mathrm{Lie}(G)$ ist vom Typ $(-1,1),(0,0),(1,-1)$ (SV2)

iii. Für alle B erfüllen die Familien von Hodgestrukturen in $H(G,X)(B)$ die Griffiths-Transversalität:
$$\nabla \mathcal{F}^p \subseteq \mathcal{F}^{p+1} \otimes \Omega^1_B$$

Beweisskizze. Es gilt (siehe Beweis zu Satz 1.4.4)
$$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{(p,q)} = \mathfrak{g}_{h^{*-1}(p,q)},$$
sowie
$$T_{h_0}(X) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} / \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{g}_{h^{*-1}(p,q)} \cong \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_{h^{*-1}(p,q)}$$
und $\mathrm{Ad}(h(z))$ operiert auf $\mathfrak{g}_{h^{*-1}(p,q)}$ durch Multiplikation mit $z^q\overline{z}^p$. Daraus folgt sofort die Äquivalenz von (i) und (ii).
Die Äquivalenz mit (iii) folgt aus
$$\nabla_x \mathcal{F}^p \subseteq \mathcal{F}^{p+n} \text{ für } x \in T_{h_0}(X) \text{ mit } \mathrm{Ad}(\mu_h(z))x = z^n x,$$
denn es genügt natürlich, die Aussage für $B = X$ zu überprüfen. □

(1.7.2) Satz. Sei D eine hermitesch symmetrischer Bereich. Man findet dann (G,X), so dass $X^+ = D^+$ und die Bedingungen der letzten Theoreme erfüllt sind.

Beweis. siehe [3, 1.1.17] oder [13, Theorem 2.14]. □

1.8 Die Siegelschen oberen Halbräume

Wähle auf $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{2g}$ die symplektische Standardform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In 1.5.1 wurde gezeigt, dass alle Morphismen vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ bzgl. derer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Polarisation ist, in GSp konjugiert sind. (Die Konjugationsklasse X_{pol}^{-1} dieser Morphismen enthält dann zusätzlich diejenigen, bzgl. der die Form 1.5.1 (ii) negativ definit ist.)
Sei eine zugehörige Hodgestruktur gegeben. Bzgl. der Standardbasis von $L_{\mathbb{Q}}$ läßt sich eine Basis von $L^{0,-1}$ als $g \times 2g$-Matrix schreiben:
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Es ist dann

$$\begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

da $L^{0,-1} \perp L^{0,-1}$ (d. h. ist isotrop (sogar maximal), nach 1.2.4). $\Rightarrow {}^tYX = {}^tXY$. Aus der Polarisationsbedingung (ii) erhält man für $v \in L^{0,-1}$.

$$\langle v + \overline{v}, h(i)(v + \overline{v})\rangle = \langle v + \overline{v}, iv - i\overline{v}\rangle = 2i\langle v, \overline{v}\rangle > 0$$

$\Rightarrow$

$$i \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} = i({}^tY\overline{X} - {}^tX\overline{Y}) \text{ pos. def.}$$

Daraus folgt, dass Y invertierbar ist, denn aus $Yw = 0$ folgt ${}^tw{}^tY = \overline{Y}\overline{w} = 0$ und damit

$$i{}^tw({}^tY\overline{X} - {}^tX\overline{Y})\overline{w} = 0$$

und damit $w = 0$. Man kann also die Basis in der Form

$$\begin{pmatrix} XY^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Matrix $Z = XY^{-1}$ ist dann durch die Hodgestruktur eindeutig bestimmt. Sie hat die Eigenschaften

i. $Z = {}^tZ$,

ii. $\Im Z$ positiv definit.

(dies folgt sofort aus ${}^tYX = {}^tXY$ und $i({}^tY\overline{X} - {}^tX\overline{Y})$ pos. def.). Die Menge aller solchen Z bildet einen offenen Teil der symmetrischen komplexen $g \times g$ Matrizen und wird als *Siegelsche oberer Halbraum* $\mathcal{S}_g^+$ bezeichnet. Man bekommt einen analytischen Isomorphismus:

$$(X_{pol}^{-1})^+ = (GSp(\mathbb{R})/K)^+ \cong \mathcal{S}_g^+$$

und hat die Einbettungen

$$\mathcal{S}_g^+ \cup \mathcal{S}_g^- \xhookrightarrow{\text{offen}} GSp(\mathbb{C})/P \xhookrightarrow{\text{abg.}} GL(\mathbb{C})/\widetilde{P} = \text{Grass}(g, 2g)$$

siehe Satz 1.4.4.
Die Operation von GSp auf den Hodgestrukturen (durch Transformation der Basis) übersetzt sich wie folgt in die bekannte Operation auf den oberen Halbräumen:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AZ + B \\ CZ + D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Lokale Systeme, Shimuravarietäten

Sei wiederum B ein analytischer Raum und $A = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}$.

(1.9.1) Definition. Ein lokales System von A-Moduln mit G-Struktur auf B ist eine Garbe $\mathcal{L}$, für die eine Überdeckung $B = \bigcup U_i$, sowie lokale Klassen von Isomorphismen

$$G(A)\alpha_i \in G(A)\backslash \operatorname{Iso}(\mathcal{L}|_{U_i}, (V_A)_{U_i}),$$

existieren, die auf den Schnitten übereinstimmen. (Man kann diese G-Struktur als globalen Schnitt einer Quotientengarbe

$$(G(A))_B \backslash \mathcal{ISO}(\mathcal{L}, (V_A)_B)$$

ansehen. Wir bezeichnen sie auch kurz mit $G(A)\alpha$.)
Die Objekte der Kategorie $\mathcal{H}(G, V_A, X)_B$ der A, G-Hodgestrukturen über B bestehen aus einem lokalen System $\mathcal{L}$ von A-Moduln mit G-Struktur auf B und einer holomorphen Hodgefiltrierung von $\mathcal{L} \otimes_{A_B} \mathcal{O}_B$, mit der Eigenschaft, dass dies lokal auf einer Überdeckung Familien aus $H(G, X)_{U_i}$ liefert. Morphismen sind Abbildungen lokaler Systeme, die die Hodgefiltrierungen ineinander überführen und mit der G-Struktur verträglich sind.

Dies definiert eine *Faser*-Kategorie über der Kategorie der analytischen Räume mit einem offentsichtlichen Basiswechsel. Wir betrachten das Modulproblem dieser Kategorie, i. e. den Funktor

$$[\mathcal{H}(G, V_A, X)] : B \mapsto \{\text{Menge der Isomorphieklassen in } \mathcal{H}(G, V_A, X)_B \ \} .$$

(1.9.2) Level-Strukturen: Wir definieren zusätzlich die Kategorien $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B$ wobei die Objekte jetzt Quadrupel

$$(\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, G(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma)$$

aus lokalen Systemen $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ von freien $\mathbb{Z}$-Moduln mit G-Struktur $G(\mathbb{Z})\alpha$, Hodgefiltrierung $\{\mathcal{F}^p\}$ und einem Isomorphismus

$$\gamma : (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

von Modulgarben mit G-Struktur.
Die Kategorie $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X)$ oben ist als Spezialfall $N = 1$ hierin erhalten.

(1.9.3) Ebenfalls für den adelischen Fall $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_B$ durch Quadrupel

$$(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma)$$

aus lokalen Systeme $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen mit G-Struktur $G(\mathbb{Q})\alpha$, Hodgefiltrierung $\{\mathcal{F}^p\}$ und *lokalen* Klassen (mod K)

$$\xi_{U_i} K : (V_{\mathbb{A}_f})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}|_{U_i}$$

von Isomorphismen von lokalen Systemen von $\mathbb{A}_f$-Moduln mit G-Struktur.
(Man kann letztere wiederum als globale Schnitte einer Quotientengarbe

$$\mathcal{ISO}((V_{\mathbb{A}_f})_B, \mathcal{L}_{\mathbb{A}_f})/(K)_B$$

auffassen.)

Direkt aus den Definitionen und Satz 1.4.4 über die Darstellbarkeit von $H(G,X)_B$ erhalten wir den Satz:

(1.9.4) Satz. Unter den Voraussetzungen

(SV1) $\mathrm{Ad}(h(i))$ ist eine Cartan-Involution der Gruppe G^{ad}

(SV5) $Z(\mathbb{Q})$ ist diskret in $Z(\mathbb{A}_f)$

gilt:

i. $G(\mathbb{Z})$ operiert auf dem Raum $X \times G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ diskret mit endlichen Stabilisatoren. Der Quotient
$$Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X) := G(\mathbb{Z})\backslash(X \times G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$
existiert als analytischer Raum. Ferner existiert eine Abbildung von Funktoren
$$[\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)] \to \mathrm{Hom}_{l.l.}(\cdot, Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X))$$
der lokal auf $X \times G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ liftbaren Abbildungen nach $Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X)$. Die Abbildung von Funktoren ist ein Isomorphismus, falls die Objekte in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_{\mathbb{C}}$ keine nicht-trivialen Automorphismen mehr besitzen (dies ist erfüllt, falls $N \gg 1$).

ii. $G(\mathbb{Q})$ operiert auf dem Raum $X \times G(\mathbb{A}_f)/K$ diskret mit endlichen Stabilisatoren. Der Quotient
$$Sh_K(G, X) := G(\mathbb{Q})\backslash(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K))$$
existiert als analytischer Raum. Ferner existiert eine Abbildung von Funktoren
$$[\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)] \to \mathrm{Hom}_{l.l.}(\cdot, Sh_K(G, X))$$
der lokal auf $X \times (G(\mathbb{A}_f)/K)$ hochhebbaren Abbildungen nach $Sh_K(G, X)$. Die Abbildung von Funktoren ist ein Isomorphismus, falls die Objekte in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_{\mathbb{C}}$ keine nicht-trivialen Automorphismen mehr besitzen (dies ist erfüllt, falls K genügend klein ist).

Man beachte, dass die Stabilisatoren bzgl. dieser Operation gerade den Automorphismen der zum jeweiligen Punkt gehörenden Objekte in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_{\mathbb{C}}$ (bzw. $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_{\mathbb{C}}$) entsprechen.

(1.9.5) Korollar. Falls $N \gg 1$ (bzw. K genügend klein) gewählt ist, ist der Funktor $[\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)]$ (bzw. $[\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)]$) darstellbar durch den analytischen Raum $Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X)$ (bzw. $Sh_K(G, X)$).

(1.9.6) Bemerkung. Die Abbildung

$$[\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)](B) \to \mathrm{Hom}_{l.l.}(B, Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, X))$$

ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv (falls Stabilisatoren, d. h. Automorphismen existieren)
nicht injektiv: Ein nicht-triviales lokales System $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, welches durch Kozykel mit Werten in $G(\mathbb{Z}, N)$, bzw. durch einen Homomorphismus

$$\pi_1(B) \to G(\mathbb{Z}, N)$$

beschrieben werden kann, kann trotzdem eine konstante Hodgestruktur und Level-N-Struktur tragen, die dann auf einen konstanten Morphismus $B \to Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, N)$ abgebildet wird.
nicht surjektiv: Man erhält aus einem lokal liftbaren Morphismus

$$\alpha : B \to Sh_N(G, V_{\mathbb{Z}}, N)$$

eine Überdeckung $\{U_i\}$ von B und Morphismen

$$\alpha_i : U_i \to X \times G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Die zugehörigen Hodgefamilien auf einem festen $L_{\mathbb{Z}}$ kann man nur zu einem Objekt in $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B$ verkleben, wenn es $g_{ij} \in G(\mathbb{Z}, N)$ mit $g_{ij} \circ \alpha_i = \alpha_j \quad \forall i, j$ gibt, die die Kozykelbedingung

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

erfüllen. Es gibt Fälle, in denen dies nicht möglich ist, falls die Auswahl der g_{ij} nicht eindeutig ist. Siehe dazu [5, p. 57].

Wir werden uns im folgenden auf den adelischen Fall der Kategorien $\mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K)_B$ konzentieren und nehmen an, dass die folgenden Bedingungen (siehe Sätze 1.6.8 und 1.7.1) erfüllt sind, d. h.

i. (SV1) $\mathrm{Ad}(h(i))$ ist eine Cartan-Involution der Gruppe G_{ad},

ii. (SV2) $\mathrm{Ad} \circ h$ induziert auf $Lie(G)$ eine Hodgestruktur vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$.

Für $K' \subseteq K$ haben wir Abbildungen $Sh_K(G, X) \to Sh'_K(G, X)$.

(1.9.7) Definition. Unter obigen Bedingungen bezeichnen wir das projektive System, oder auch den projektiven Limes der $Sh_K(G, X)$ als die *Shimuravarietät* $Sh(G, X)$ zum *Shimura-Datum* (G, X).

Sei eine K-Level-Struktur $\alpha = \{\alpha_i\}$,

$$\alpha_i K : (V_{\mathbb{A}_f})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}|_{U_i}$$

gegeben. Zu jedem $g \in G(\mathbb{A}_f)$ ist dann $\alpha K g$ eine $g^{-1}Kg$-Level-Struktur. Auf den Modulräumen induziert dies eine Abbildung

$$Sh_K(G, X) \to Sh_{g^{-1}Kg}(G, X)$$

via Multiplikation von rechts. Im projektiven Limes erhalten wir somit eine Rechtsoperation von $G(\mathbb{A}_f)$ auf $Sh(G, X)$.

1.10 Klassen, Vergleich der adelischen und ganzahligen Variante

In der Situation von 1.3, d. h. G, reduktiv, operiert treu auf einem Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$ und es ist ein Gitter $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{Q}}$ gewählt, gibt es dann eine natürliche Zahl $M = \mathrm{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})$ mit den Eigenschaften aus 1.3.
Für jedes $c \in G(\mathbb{A}_f)$ bilde das Gitter

$${}^cV_{\mathbb{Z}} = g_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Z}},$$

wobei $c = g_{\mathbb{Q}} g_K \in GL(\mathbb{Q})GL(\widehat{\mathbb{Z}}) = GL(\mathbb{A}_f)$. Es ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$c(V_{\widehat{\mathbb{Z}}}) = {}^cV_{\widehat{\mathbb{Z}}}$$

in $V_{\mathbb{A}_f}$ und c läßt sich durch Reduktion mod N auffassen als eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$c : V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \to {}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} = {}^cV_{\mathbb{Z}}/N {}^cV_{\mathbb{Z}}.$$

Wir definieren kompakte offene Gruppen relativ zu $V_{\mathbb{Z}}$ durch

$$K(N) := \left\{ A \in G(\mathbb{A}_f) \mid AV_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V_{\widehat{\mathbb{Z}}}; A \equiv 1 \mod N) \right\}.$$

Es gibt dann für alle $c \in G(\mathbb{A}_f)$ einen Funktor:

$$\mathcal{H}(G, {}^cV_{\mathbb{Z}}, X, N)_B \xrightarrow{c} \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K(N))_B,$$

Beweis. Sei ein Objekt

$$[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^cG(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma],$$

sowie eine Überdeckung $\{U_i\}$, die $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ trivialisiert:

$$\alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} (V_{\mathbb{Z}})_{U_i},$$

gegeben. Interpretiere die Level-N-Struktur

$$\gamma : ({}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}|_{U_i}$$

wie folgt als $K(N)$-Level-Struktur:

$$\xi_{U_i}K(N) : (V_{\mathbb{A}_f})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}|_{U_i}.$$

Die Abbildung

$$\alpha_i \circ \gamma \circ c : V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \to {}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

liftet wegen Eigenschaft (iii) oben (bzw. nach Definition, vgl. 1.3) zu einer Abbildung

$$\beta_i : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \to {}^cV_{\widehat{\mathbb{Z}}}.$$

$\xi_i K(N) = \alpha_i^{-1} \circ \beta_i K(N)$ ist dann eindeutig bestimmt und verklebt sich zu einer K-Level-Struktur $\xi K(N)$. Das Bildobjekt

$$(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\alpha_{\mathbb{Q}}, \{\mathcal{F}^p\}, \xi K(N))$$

hängt nicht von der Wahl der Trivialisierung ab. □

Wir rufen die Definition der Klassen $cl(G)$ von G bzgl. der gewählten Darstellung und $V_{\mathbb{Z}}$ in Erinnerung:

$$\mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K(1),$$

wobei $G(\mathbb{Q})$ diagonal in $G(\mathbb{A}_f)$ eingebettet ist. Die Anzahl ist die *Klassenzahl* von G bzgl. der gewählten Darstellung und $V_{\mathbb{Z}}$.
Es gilt (siehe [17, Theorem 8.1]):

(1.10.1) Satz. $\mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}})$ ist eine endliche Menge.

Diese Klassen haben die folgende Interpretation:

(1.10.2) Definition. Das Geschlecht von $V_{\mathbb{Z}}$ ist die Menge der Gitter $V'_{\mathbb{Z}}$ mit der Eigenschaft

$$\exists g \in G(\mathbb{A}_f) : \quad V'_{\widehat{\mathbb{Z}}} = gV_{\widehat{\mathbb{Z}}}.$$

(Dies sind alle Gitter der Form ${}^cV_{\mathbb{Z}}$, wie oben)
Zwei Gitter $V'_{\mathbb{Z}}$ und $V''_{\mathbb{Z}}$ heißen äquivalent, falls ein $g \in G_{\mathbb{Q}}$ existiert mit $V'_{\mathbb{Z}} = gV''_{\mathbb{Z}}$. (Die Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation nennen wir auch nur kurz die Klassen.)

Es gilt dann:

(1.10.3) Satz. $\mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}})$ ist isomorph zur Menge der Klassen im Geschlecht von $V_{\mathbb{Z}}$.

Beweis. Sei ein Gitter $V'_{\mathbb{Z}}$ im Geschlecht von $V_{\mathbb{Z}}$ gegeben. Nach Definition existiert ein $g \in G(\mathbb{A}_f)$ mit

$$V'_{\widehat{\mathbb{Z}}} = gV_{\widehat{\mathbb{Z}}}$$

Dies bestimmt eine Klasse

$$G(\mathbb{Q})gK \in \mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}}).$$

Die Wahl eines $g' \circ \alpha = g$ mit $\alpha \in K$ (nach Definition von K) führt zu derselben Nebenklasse. Die Wahl eines anderen $V''_{\mathbb{Z}}$ in derselben Klasse führt zu einem $\alpha g' = g$ mit $\alpha \in G(\mathbb{Q})$, bzgl. der diagonalen Einbettung. Dies zeigt die Wohlbestimmtheit und Injektivität der Abbildung. Sei nun eine Klasse $G(\mathbb{Q})cK$ in $cl(G, V_{\mathbb{Z}})$ gegeben. ${}^cV_{\mathbb{Z}}$ liegt dann im Geschlecht von $V_{\mathbb{Z}}$ und wird auf die Nebenklasse von g abgebildet. □

(1.10.4) Beispiel. Sei F ein Zahlkörper und operiere $G = R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ auf $V_{\mathbb{Q}} = F$ in der natürlichen Darstellung. Die Geschlechter von Gittern $V_{\mathbb{Z}}$ stehen dann in Bijektion mit den Ordnungen von F. Die entsprechenden Gitter bilden dann die Menge der gebrochenen *invertierbaren* Ideale dieser Ordnung, die Klassen sind die herkömmlichen Idealklassen und die $\mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}})$ die Idealklassengruppen.
Man kann $\mathrm{ind}(G, V_{\mathbb{Z}}) = 1$ annehmen, falls die zugehörige Ordnung die Maximalordnung ist. In diesem Fall gilt für alle p:

$$G(\mathbb{F}_p) \cong (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{F}_p)^*$$

Die Gruppenschemata $G \times \mathbb{F}_p$ sind allerdings nur für unverzweigte p wieder Tori.

(1.10.5) Beispiel. Sei $G = GSp$ die symplektische Ähnlichkeitengruppe bzgl. der symplektischen Standardform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $V_{\mathbb{Q}}$. Die Geschlechter von Gittern werden parametrisiert durch g-Tupel $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_g) \in (\mathbb{Q}^* \times \cdots \times \mathbb{Q}^*)/(\mathbb{Q}^*)$, mit $d_i/d_j \in \mathbb{Z}$ für $i > j$. Auf diesen Gittern gibt es eine Basis, mit der Eigenschaft, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Form

$$\begin{pmatrix} & & & d_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_g \\ -d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -d_g & & & \end{pmatrix}$$

hat.
Es gibt jeweils nur eine Klasse.
Man kann $\mathrm{ind}(G, V_{\mathbb{Z}}) = 1$ annehmen, falls $\mathbf{d} \sim (1, \ldots, 1)$ ist. Falls die Form auf $V_{\mathbb{Z}}$ unimodular ist, gilt darüberhinaus:

$$G(\mathbb{F}_p) \cong \left\{\alpha \in GL(V_{\mathbb{F}_p}) \;\middle|\; \langle\alpha\cdot, \alpha\cdot\rangle = \gamma\langle\cdot,\cdot\rangle, \gamma \in \mathbb{F}_p^*\right\}$$

(Allgemein gilt dies nur für $p \not| d_g$)

(1.10.6) Satz. Seien $\{{}^cV_{\mathbb{Z}}\}_{c \in cl(G,V_{\mathbb{Z}})}$ Vertreter des Geschlechtes von $V_{\mathbb{Z}}$. Es ist dann

$$\dot{\bigcup}_{[c] \in cl(G,V_{\mathbb{Z}})} \mathcal{H}(G, {}^cV_{\mathbb{Z}}, X, N)_B \xrightarrow[\bigcup c]{\sim} \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K(N))_B$$

Beweis. Es genügt den Beweis lokal zu führen. Sei also $\{U_i\}$ wieder eine Überdeckung von B, die L trivialisiert.
Sei $(\mathcal{L}_\mathbb{Q}|_{U_i}, G(\mathbb{Q})\alpha_i, \{F^p\}, \xi)$ in $\mathcal{H}(G, V_\mathbb{Q}, X, K(N))_B$ gegeben.
Schreibe $\xi = \alpha_i^{-1} h_\mathbb{Q} c h_K$, mit $h_\mathbb{Q} \in G(\mathbb{Q}), h_K \in K(1)$ für ein *ausgewähltes* c. Dies ist unabhängig von i, da B zusammenhängend ist. Schreibe ferner $c = g_\mathbb{Q} g_K$ in $GL(V_{\mathbb{A}_f})$ mit ${}^cV_\mathbb{Z} = g_\mathbb{Q} V_\mathbb{Z}$.
Obiges Quadrupel ist isomorph zu

$$(\mathcal{L}_\mathbb{Q}|_{U_i}, G(\mathbb{Q})\alpha_i, (h_\mathbb{Q}^{-1})^{\alpha_i}\{\mathcal{F}^p\}, \alpha_i^{-1} c h_K).$$

Es ist das Bild von

$$(\mathcal{L}_\mathbb{Z}|_{U_i}, {}^cG(\mathbb{Z})\alpha_i, (h_\mathbb{Q}^{-1})^{\alpha_i}\{\mathcal{F}^p\}, \alpha_i^{-1}\gamma)$$

in $\mathcal{H}(G, {}^cV_\mathbb{Z}, X, N)_B$ unter dem fraglichen Funktor, mit $\gamma = \overline{ch_K c^{-1}} \in {}^cG(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Dabei ist $\mathcal{L}_\mathbb{Z}|_{U_i}$ definiert als $\alpha_i^{-1}({}^cV_\mathbb{Z})_{U_i}$.
Diese Konstruktion liefert einen quasiinversen Funktor.
Man überprüft, dass sich diese Daten auf B verkleben. Die Morphismen entsprechen sich ebenfalls, wie man leicht überprüft. □

Für die Modulräume erhalten wir entsprechend:

$$G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)/K(N)) \cong \bigcup_{[c]\in cl(G,V_\mathbb{Z})} {}^cG(\mathbb{Z})\backslash(X \times {}^cG(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})).$$

Für weitere Interpretationen der Klassen von G, siehe [17, Chapter 7].

(1.10.7) Bemerkung. Für festes N können die Vertreter c der Klassen von G so gewählt werden, dass $c_p = 1$ für alle $p|N$. Die Abbildungen

$$c : V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \to {}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$$

sind dann die kanonischen Isomorphismen (da ${}^cV_{\mathbb{Z}_p} = V_{\mathbb{Z}_p}$ in $V_{\mathbb{Q}_p}$ für alle $p|N$).

1.11 Zusammenhangskomponenten

Wir nehmen hier an, dass G^{der} einfach zusammenhängend ist.
Die Zusammenhangskomponenten der Shimuravarietäten werden dann hauptsächlich durch den größten abelschen Quotienten T von G beschrieben. Es gibt die folgende Sequenz:

$$1 \to G^{der} \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T \to 1$$

und es gilt der

(1.11.1) Satz. Für jede (hinreichend kleine) kompakt-offene Gruppe $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ gibt es einen Isomorphismus

$$\pi_0(G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K) \cong T^\dagger(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K),$$

wobei $T^\dagger(\mathbb{Q}) = T(\mathbb{Q}) \cap \Im(Z(\mathbb{R}) \to T(\mathbb{R}))$. Ferner sind beide Mengen endlich und die Zusammenhangskomponenten sind von der Form $\Gamma\backslash X^+$ für eine Kongruenzuntergruppe $K \cap G^{der}(\mathbb{Q}) \subseteq \Gamma \subset G^{der}(\mathbb{Q})$.

Beweis. siehe [13, Theorem 5.16]. □

(1.11.2) Beispiel. Für $G = GSp$ ist die obige Sequenz gegeben durch

$$1 \to Sp \longrightarrow GSp \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_m \to 1$$

und $\lambda(K(N)) = \left\{x \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \mid x \equiv 1 \mod N\right\}$ für die Gruppen $K(N)$ im letzten Abschnitt (bzgl. eines Gitters $V_\mathbb{Z}$, $(N, \mathrm{ind}(G, V_\mathbb{Z})) = 1$). Ferner ist $\mathbb{G}_m^\dagger(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{>0}$. D. h., es gilt:

$$\pi_0(GSp(\mathbb{Q})\backslash X \times GSp(\mathbb{A}_f)/K(N)) \cong \mathbb{Q}^{>0}\backslash\mathbb{A}_f^*/\lambda(K(N)) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*.$$

Die Zusammenhangskomponenten sind von der Form $\Gamma(N)\backslash\mathcal{S}_g^+$. Dabei ist $\Gamma(N)$ die übliche Kongruenzuntergruppe des Levels N in $Sp(2g, \mathbb{Z})$.

1.12 Übergang zum projektiven Limes

(1.12.1) Satz. Unter der Voraussetzung (SV5) gilt:

$$\overleftarrow{\lim}_K G(\mathbb{Q})\backslash(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K)) \cong G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)).$$

Beweis. siehe [13, Theorem 5.27]. □

1.13 Funktorialität in G

Seien (H, Y) und (G, X) Shimuradaten und $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Einbettung mit $i(Y) \subseteq X$ und $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ eine kompakt offene Untergruppe. Die gewählten Operationen auf $V_\mathbb{Q}$ seien mit ι verträglich.
Es gibt dann einen Funktor:

$$\iota^* : \mathcal{H}(H, V_\mathbb{Q}, Y, \iota^{-1}K)_B \to \mathcal{H}(G, V_\mathbb{Q}, X, K)_B$$

$$(\mathcal{L}_\mathbb{Q}, H(\mathbb{Q})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \xi) \mapsto (\mathcal{L}_\mathbb{Q}, G(\mathbb{Q})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \xi),$$

der auf dem Level der Modulräume durch die Abbildung

$$\iota^* : H(\mathbb{Q})\backslash(Y \times (H(\mathbb{A}_f)/(H(\mathbb{A}_f) \cap K))) \to G(\mathbb{Q})\backslash(X \times (G(\mathbb{A}_f)/K))$$

$$H(\mathbb{Q})[h, \xi]\iota^{-1}K \mapsto G(\mathbb{Q})[\iota \circ h, \iota(\xi)]K$$

beschrieben wird.
Unter der Voraussetzung (SV5) ergibt dies im projektiven Limes die *injektive* Abbildung

$$H(\mathbb{Q})\backslash(Y \times H(\mathbb{A}_f)) \to G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)).$$

Der Funktor auf dem Niveau der $\mathbb{Q}$-Hodgestrukturen (ohne K-Levelstruktur)

$$\mathcal{H}(H, V_{\mathbb{Q}}, Y)_B \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X)_B$$

ist von der $G(\mathbb{Q})$-Konjugationsklasse der Einbettung $\iota : H \hookrightarrow G$ unabhängig.
Daraus folgt für den Fall eines Gitters $V_{\mathbb{Z}}$, $K = K(1)$ das folgende

(1.13.1) Lemma. Jeder Modulpunkt

$$[\iota^g \circ h, \iota^g(\xi)] \in Sh_K(G, X)$$

ist im Bild einer der Abbildungen $(\iota^{g_j})^*$, wobei die $g_j V_{\mathbb{Z}}$ ein Vertretersystem von H-Geschlechtern in der G-Klasse von $V_{\mathbb{Z}}$ bilden.
Falls $Y = \{h\}$ und $\mathrm{Stab}(h, G(\mathbb{Q})) \subseteq H(\mathbb{Q})$, so ist dieses Geschlecht eindeutig bestimmt.

Beweis. Es gilt $g = \iota(\rho) g_j k$ für gewisse $\rho \in H(\mathbb{A}_f), k \in K(1)$ und genau ein g_j, d. h. $g^{-1}\iota(\rho) g_j \in K(1)$.
Es ist dann

$$[\iota^g \circ h, \iota^g(\xi)] = [\iota^{g_j} \circ h, (g_j)^{-1}\iota(\xi) g] = [\iota^{g_j} \circ h, \iota^{g_j}(\xi\rho)]$$

Unter der einschränkenden Voraussetzung sind zwei solche Punkte $[\iota \circ h, \iota(\xi)]$ und $[(\iota \circ h)^g, g^{-1}\iota(\xi')g]$ (OBdA hat der erste Punkt diese Gestalt) genau dann isomorph, wenn ein $g' \in G(\mathbb{Q})$ existiert mit $(\iota \circ h)^g = (\iota \circ h)^{g'}$ und $\iota(\xi)K(1) = g' g^{-1}\iota(\xi') g K(1)$. Aus der zusätzlichen Voraussetzung folgt: $g' g^{-1} \in \iota(H(\mathbb{Q}))$. Damit existiert ein $\rho \in H(\mathbb{A}_f)$ mit $gK(1) = \iota(\rho)K(1)$. $\square$

(1.13.2) Für jedes N mit $(N, \mathrm{ind}(G, V_{\mathbb{Z}})) = (N, \mathrm{ind}(H, V_{\mathbb{Z}})) = 1$ und für $c \in H(\mathbb{A}_f)$, $d \in G(\mathbb{A}_f)$ gibt es Funktoren:

$$\begin{array}{rcl} \iota^*_{c^{-1}d} : \mathcal{H}(H, {}^cV_{\mathbb{Z}}, Y, N)_B & \to & \mathcal{H}(G, {}^dV_{\mathbb{Z}}, X, N)_B \\ (\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^cH(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma) & \mapsto & (\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^dG(\mathbb{Z})g^{-1}\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma\iota(c)d^{-1}) \end{array}$$

wobei $\iota(c) = gdk \in G(\mathbb{Q})dK(1)$ ist, m. a. W. $[c]$ wird bzgl. der durch ι induzierten Abbildung

$$\mathrm{cl}(H, V_{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{cl}(G, V_{\mathbb{Z}})$$

auf $[d]$ abgebildet. (Der Funktor ist von der Wahl der Zerlegung gdk unabhängig.)
Es gibt dann kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(H, {}^cV_{\mathbb{Z}}, Y, N)_B \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\iota^*_{c^{-1}d}"] & \mathcal{H}(H, V_{\mathbb{Q}}, Y, K(N))_B \arrow[d, "\iota^*"] \\ \mathcal{H}(G, {}^dV_{\mathbb{Z}}, X, N)_B \arrow[r, "d"] & \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Q}}, X, K(N))_B \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei

$$[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^{c}H(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma]$$

ein Objekt in $\mathcal{H}(H, {}^{c}V_{\mathbb{Z}}, X, N)_B$. Es wird unter den fraglichen Abbildungen wie folgt abgebildet:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^{c}H(\mathbb{Z})\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, H(\mathbb{Q})\alpha_{\mathbb{Q}}, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma c]} \arrow[d, mapsto] \\
{[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, {}^{d}G(\mathbb{Z})g^{-1}\alpha, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma c d^{-1}]} \arrow[r, mapsto] & {[\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, G(\mathbb{Q})\ \cancel{g}^{-1}\alpha_{\mathbb{Q}}, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma c]}
\end{tikzcd}$$

□

1.14 Geometrische Motivation

Dieser Abschnitt dient der Illustation der geometrischen Bedeutung der oben definierten abstrakten Familien von Hodgestrukturen, für Details siehe z. B. [23, Chapter 10]. Im folgenden wird im wesentlichen der Spezialfall $n = 1$ benötigt.
Auf einer eine kompakten Kählermannigfaltigkeit X gibt es die kanonische Hodgestruktur

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{pq}$$

mit

$$H^{pq} \cong H^q(X, \Omega^p),$$

sowie

$$H^{pq} = \overline{H}^{qp}.$$

Diese induziert (wie im abstrakten Fall definiert) eine Hodgefiltrierung

$$\{F^q H^n(X, \mathbb{C})\}_q$$

Diese ist in der folgenden Weise das natürlichere Objekt: Wir haben den holomorphen DeRham-Komplex $\Omega^{\cdot}$:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X \to \Omega_X^2 \to \cdots$$

welcher eine Auflösung von $\mathbb{C}_X$ ist. Insofern gilt:

$$H^i(X, \mathbb{C}_X) = R^i\Gamma(\Omega_X^{\cdot}).$$

Der holomorphe DeRham-Komplex hat eine triviale Filtrierung, i.e. den abgeschnittenen DeRham-Komplex $F^p\Omega^{\cdot}$:

$$0 \to \cdots \to 0 \to \Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1} \to \cdots$$

Die zugehörige Spektralsequenz degeneriet und liefert eine Filtrierung

$$F^p H^i(X, \mathbb{C}_X).$$

Diese ist gerade die obige Hodgefiltrierung.
Sei B ein analytischer Raum, den wir im folgenden der Einfachheit halber als nicht singulär vorraussetzen.

(1.14.1) Definition. Eine Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten über B ist eine eigentliche holomorphe Submersion

$$\pi : \mathcal{X} \to B.$$

Dies definiert in offensichtlicher Weise eine Kategorie as_B.
Es gilt der folgende

(1.14.2) Satz. Zu jedem Punkt $p \in B$ gibt es eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus

$$T : \mathcal{X} \cong X_p \times U$$

so, dass $pr_2 \circ T = \pi|_{\pi^{-1}U}$ und alle $T^{-1}(x, U)$ komplexe Untermannigfaltigkeiten von $\mathcal{X}$ sind.

Beweis. siehe [23, Chapter 10]. □

Die Holgefiltrierungen lassen sich nun in der folgenden Weise für die Familie simultan berechnen: Man hat einen relativen holomorphen DeRham-Komplex

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/B} \to \Omega^2_{X/B} \to \cdots$$

der eine Auflösung der Garbe $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$ ist. Es gilt also wie oben:

$$R^i\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_B) = R^i\pi_*(\Omega^{\cdot}_{X/B}).$$

Ferner ist

$$R^i\pi_*(\pi^{-1}\mathcal{O}_B) \cong (R^i\pi_*\mathbb{C}_X) \otimes \mathcal{O}_B.$$

Lokal ist

$$(R^i\pi_*\mathbb{C}_X)|_U \cong H^1(X_p, \mathbb{C})_U, \quad \text{für ein } p \text{ aus } U,$$

die Garbe ist also ein lokales System von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Die abgeschnittenen relativen DeRham-Komplexe, induzieren auch hier eine Filtrierung von $(R^i\pi_*\mathbb{C}_X) \otimes \mathcal{O}_B$ im Sinne von 1.9 durch $\mathcal{O}_B$-Modulgarben, die punktweise die Hodgefiltrierung oben liefern. Ferner existiert die lokal konstante Garbe

$$R^i\pi_*\mathbb{Z}_X$$

die punktweise das Gitter $H^1(X_p, \mathbb{Z}) \subset H^1(X_p, \mathbb{C})$ liefert.

(1.14.3) Falls nun B nichtsingulär und zusammenhängend ist, ist die Dimensionen der Räume der Hodgestrukturen konstant über die Familie X und wir erhalten für alle n und Familien mit einem Hodgetyp $\{h^{(p,q)}\}_{p+q=n}$ einen *kontravarianten* Funktor

$$P_i : as_{B,\{h^{(p,q)}\}} \to \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, 1)_B$$

für X die Konjugationsklasse der Morphismen des Typs $\{h^{(p,q)}\}$ und vorerst $G = GL(V_{\mathbb{Q}})$, wobei $\dim(V_{\mathbb{Q}}) = \dim H^n(X_p, \mathbb{Q})$.

Ferner folgt aus den Betrachtungen in den letzten Abschnitten die Existenz einer holomorphen Abbildung

$$B \to G(\mathbb{Z})\backslash G/K = G(\mathbb{Z})\backslash X = Sh_1(G, V_{\mathbb{Z}}, X).$$

Diese Abbildung heißt auch Periodenabbildung.
Die Hodgefiltrierungen können auf dem primitiven Anteil

$$(R^i \pi_* \mathbb{Z}_X)_{prim}$$

durch die Kähler-Struktur auf $\mathcal{X}$ polarisiert werden, man hat also in Wirklichkeit einen Funktor

$$P_i : as_{B,\{h^{(p,q)}\}} \to \mathcal{H}(G, V_{\mathbb{Z}}, X, 1)_B$$

für $G = GSp(\phi)$ bzw. $G = GO(\phi)$, siehe (1.5.1), und X sowie ϕ geeignet.
Ferner ist für die Familien im Bild des Funktors die Transversalitätseigenschaft (Satz 1.7.1, (iii)) erfüllt. Man kann also höchstens dann eine essentiell surjektiven Funktor erwarten, falls (G, X) die äquivalenten Eigenschaften aus diesem Satz erfüllt.

Kapitel 2

Analytische Theorie

2.1 Familien Abelscher Varietäten

Sei B wie im Abschnitt 1.14 ein analytischer Raum.

(2.1.1) Definition. Eine abelsche Varietät[1] über B der relativen Dimension g ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Familien komplexer Mannigfaltigkeiten (1.14.1) über B, deren Fasern die komplexe Dimension g haben.

Die Unterkategorie von as_B der abelschen Varietäten der relativen Dimension g wird mit $av_{g,B}$ bezeichnet. Als Morphismen werden nur solche zugelassen, die die Gruppenstruktur respektieren. Die Fasern dieser Familien sind dann kompakte Liegruppen über $\mathbb{C}$ und daher isomorph zu komplexen Tori $\mathbb{C}^g/\Gamma$ (Γ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{C}^g$).
Gleich werden wir sehen, dass der Periodenfunktor (1.14.3) für $i = 1$ eine Anti-Äquivalenz von Kategorien

$$P_1 : av_{g,B} \to \mathcal{H}(GL_{2g}, V_{\mathbb{Z}}, X^1, 1)_B$$

ist. (X^1 ist die Konjugationsklasse der Morphismen vom Typ $(1,0),(0,1)$)
Dieser Funktor war wie folgt definiert:

$$\mathcal{X} \mapsto [R^1\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{X}}, \left\{R^1\pi_*\mathbb{C}_{\mathcal{X}} \supseteq \pi_*(\Omega_{\mathcal{X}/B}) \supseteq 0\right\}]$$

Punktweise ergibt dies

$$\mathcal{X}_p \mapsto [H^1(\mathcal{X}_p, \mathbb{Z}), \{H^1(\mathcal{X}_p, \mathbb{C}) \supseteq \mathrm{Lie}(\mathcal{X}_p^*) \supseteq 0\}]$$

da $\Omega(\mathcal{X}_p) \cong \mathrm{Lie}(\mathcal{X}_p)^*$.
Wir betrachten hier den kovarianten Funktor P_{-1}, der einer Familie die duale Hodgefiltrierung zuordnet (siehe 1.1.4 und auch 1.4.3):

$$\begin{array}{rcl} P_{-1} : av_{g,B} & \to & \mathcal{H}(GL_{2g}, V_{\mathbb{Z}}, X^{-1}, 1)_B \\ \mathcal{X} & \mapsto & [\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, \{\mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_B \supseteq \mathcal{F}_0 \supseteq 0\}] \end{array}$$

[1] in diesem Abschnitt werden auch Familien komplexer Tori zugelassen, die nicht polarisierbar, d. h. auch nicht algebraisch sind, vgl. 2.2

(X^{-1} ist die Konjugationsklasse der Morphismen vom Typ $(-1,0),(0,-1)$)
Punktweise ergibt dies

$$\mathcal{X}_p \mapsto [H_1(\mathcal{X}_p,\mathbb{Z}),\{H_1(\mathcal{X}_p,\mathbb{C})\supseteq \overline{\mathrm{Lie}(\mathcal{X}_p)}\supseteq 0\}],$$

und es gilt dann sogar

$$\mathcal{X}\cong [\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}\otimes\mathcal{O}_B]/([\mathcal{F}_0]+[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}])$$

(siehe [14]).
Daraus folgt, dass der obige Funktor eine Äquivalenz ist, denn jede Familie von Hodgefiltrierungen liefert auf diese Weise auch eine abelsche Varietät über B.

(2.1.2) Die Äquivalenz ist nur der Spezialfall $N=1$ einer weitergehenden Äquivalenz

$$P_{-1}: av_{g,B,N}\to\mathcal{H}(GL_{2g},V_{\mathbb{Z}},X,N)_B,$$

wobei in der Kategorie $av_{g,B,N}$ Paare $(\mathcal{X},\phi)$ aus einer abelschen Varietät über B und einer Level-N-Struktur darauf betrachtet werden. Eine Level-N-Struktur ist hier ein Isomorphismus

$$\phi:[(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B]\to\mathcal{X}[N],$$

wobei $\mathcal{X}[N]:=\ker([N]:\mathcal{X}\to\mathcal{X})$. Als Morphismen $\mathcal{X}\to\mathcal{X}'$ lassen wir ebenfalls nur Isomorphismen zu, die in offensichtlicher Weise mit den Level-N-Strukturen verträglich sind. Beachte dazu die kanonische Isomorphie

$$\mathcal{X}[N]\cong[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}].$$

Isogenie-Kategorie

(2.1.3) In der adelischen Sprache haben wir eine Äquivalenz

$$\mathbb{Q}P_{-1}:\mathbb{Q}av_{2g,B,K}\to\mathcal{H}(GL_{2h},V_{\mathbb{Q}},X,K)_B,$$

für $K\subset GL_{2g}(\mathbb{A}_f)$ kompakt offen.
Zunächst sei die Kategorie $\mathbb{Q}av_{2g,B}$ aus den Objekten $\mathcal{X}$ aus $av_{2g,B}$ gebildet, jedoch mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}):=\mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

Jede Isogenie, d. h. ein Morphismus $\alpha:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ mit Kern K_B, wobei K eine endliche abelsche Gruppe ist wird auf diese Weise zu einem Isomorphismus, denn es existiert immer eine Isogenie α' mit

$$\alpha'\alpha=[N]:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$$

wobei $N=\#K$. Dies ist im analytischen Fall einfach zu sehen, denn α wird durch einen Morphismus

$$\alpha:\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}\to\mathcal{L}'_{\mathbb{Z}}$$

gegeben. Die geforderte Isogenie α' wird dann durch die adjungierte Abbildung

$$\widetilde{\alpha} : \mathcal{L}'_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$$

da $\det(\alpha_p) \equiv \#K$.
Für jede offene Menge U in B bilden die Kerne $\mathcal{X}|_U[N]$ ein projektives System bzgl. der Abbildungen

$$\mathcal{X}_U[NM] \xrightarrow{[N]} \mathcal{X}_U[M]$$

und wir schreiben

$$\varprojlim \mathcal{X}_U[M]$$

für den projektiven Limes bzgl. dieser Abbildungen. (vgl. die algebraische Definition des Tate-Moduls - 3.1.4) Wegen der kanonischen Isomorphie $\mathcal{X}_U[N] \cong [\mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}|_U]$ gibt es eine Isomorphie:

$$[\mathcal{L}_{\mathbb{A}_f}|_U] \cong (\varprojlim_N \mathcal{X}_U[N]) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f).$$

Die Kategorie $\mathbb{Q}av_{2g,B,K}$ sei nun aus Paaren $(\mathcal{X}, \{\gamma_i\})$ gebildet, mit den Objekten $\mathcal{X}$ aus $\mathbb{Q}av_{2g,B}$ und einer K-Level-Struktur, d. h. lokal (auf einer geeigneten Überdeckung) gegebenen Klassen (modulo K) von Isomorphimen

$$\gamma_i K : [(V_{\mathbb{A}_f})_{U_i}] \to (\varprojlim_N \mathcal{X}_{U_i}[N]) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f.$$

Von den Morphismen verlangen wir wiederum, dass sie in offensichtlicher Weise mit den K-Level-Strukturen verträglich sind.
Jeder Funktor auf $av_{g,B}$ mit Werten in $\mathbb{Q}$-Vektorräumen oder lokalen Systemen von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen etc. setzt sich in offensichtlicher Weise auf die Kategorie $\mathbb{Q}av_{g,B}$ fort. Insbesondere induziert jeder Morphismus

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

eine wohldefinierte Abbildung

$$\alpha : \mathcal{L}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}.$$

Dies definiert den Funktor, denn die Verträglichkeit der K-Level-Strukturen oben ist dann gleichbedeutend mit der Verträglichkeit dieser Abbildung mit der abstrakten K-Level-Struktur (siehe 1.9.3).
Um die Äquivalenz zu sehen, müssen wir aus einem System von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ und einer abstrakten K-Level-Struktur eine abelsche Varietät über B rekonstruieren. Dazu genügt es, irgendein erzeugendes lokales System $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ zu wählen und dann

$$\mathcal{X} := [\mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_B] \setminus ([\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}] + [\mathcal{F}^0])$$

(wie oben) zu bilden. Die Existenz eines solchen Systems kann man wie in 1.10 aus der Existenz der K-Level-Struktur folgern.

2.2 Polarisation

Die Hodgestrukturen auf $H^1(\mathcal{X}_p, \mathbb{C})$ können, falls die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{X}_p$ polarisiert sind, wie in (1.14) beschrieben, polarisiert werden. Die duale Polarisation auf $H_1(\mathcal{X}_p, \mathbb{C})$ wird in diesem Abschnitt untersucht. Dabei erhalten wir gleichzeitig einen Überblick über alle möglichen Polarisationen.
Sei A eine abelsche Varietät über $\mathbb{C}$. (Zur Übersichtlichkeit betrachten wir hier keine Familien von abelschen Varietäten, doch läßt sich alles sinngemäß übertragen.)
Eine Polarisation der zugehörigen Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{C}} = H_1(A, \mathbb{C})$

$$\phi \in (L^* \otimes L^*)^{(1,1)} \cap (L^*_{\mathbb{Q}} \otimes L^*_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}(L, L^*)^{(1,1)} \cap \mathrm{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, L^*_{\mathbb{Q}})$$

läßt sich durch Einschränkung auf $L^{-1,0}$ auffassen als Isomorphismus (Bedingung (ii)!)

$$\phi' : \mathrm{Lie}(A) \to H^1(A, \mathcal{O}_X) \cong \overline{\mathrm{Lie}(A)}^*.$$

(Dieser gehört zur Sesquilinearform $\phi(v, \overline{w})$ auf $L^{(-1,0)} = \mathrm{Lie}(A)$.) Sei $p^{(i,j)}$ die Projektion auf den jeweiligen (i, j)-Faktor.
Falls die Polarisation so gewählt ist, dass ϕ auf $L_{\mathbb{Z}}$ ganzzahlige Werte annimmt, so gilt:

$$\phi'(p^{(-1,0)}(L_{\mathbb{Z}})) \subseteq p^{(0,1)}(L^*_{\mathbb{Z}})$$

und wir erhalten eine Isogenie:

$$\phi' : H_1(A, \mathbb{Z})\backslash \mathrm{Lie}(A) \to H^1(A, \mathbb{Z})\backslash H^1(A, \mathcal{O}_X)$$

Sie ist ein Isomorphismus, genau dann, wenn ϕ auf $L_{\mathbb{Z}}$ unimodular ist, ansonsten ist der Kern $\cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})^2 \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^2$, mit $d_1|\cdots|d_g$, genau dann, wenn ϕ auf $L_{\mathbb{Z}}$ vom Typ $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_g)$ ist.

Wir haben auf der anderen Seite einen $\mathbb{R}$-Isomorphismus induziert durch die Projektion auf den $(-1, 0)$-Anteil:

$$p : L_{\mathbb{R}} \to L_{\mathbb{C}}/L^{(0,-1)} \cong L^{(-1,0)}.$$

Für den Pushforward der Form ϕ gilt:

$$p^*\phi(iv, iw) = p^*\phi(v, w)$$

(ϕ ist $h(U_1)$-invariant und $ip(x) = p(h(i)x)$), d. h. $p^*\phi$ ist Imaginärteil einer hermiteschen Form

$$H_\phi(v, w) = p^*\phi(iv, w) + ip^*\phi(v, w).$$

Für diese beiden Formen auf $\mathrm{Lie}(A)$ gilt:

$$2i\phi(v, \overline{w}) = H_\phi(v, w).$$

H_ϕ ist positiv definit, genau dann, wenn die Polarisationsbedingung 1.5.1 (ii) erfüllt ist. Wir werden nicht mit H_ϕ arbeiten.

Die abelsche Varietät $H^1(A, \mathbb{Z})\backslash H^1(A, \mathcal{O}_A)$ kann mit der Gruppe

$$\mathrm{Pic}(X) = \{ \text{ Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf } A\} \cong H^1(A, \mathcal{O}^*_A)$$

über die Exponentialsequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}_A^* \to 1$$

und die dazugehörige lange exakte Kohomologiesequenz

$$H^1(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(A,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(A,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A,\mathcal{O})$$

in Verbindung gebracht werden.
Diese definiert eine Einbettung von ${}^tA := H^1(A,\mathbb{Z})\backslash H^1(A,\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(A)$. Durch obige Sequenz erhält $\mathrm{Pic}(A)$ die Struktur einer analytischen Varietät in der ${}^tA$ die Zusammenhangskomponente $\mathrm{Pic}^0(A)$ der 1 ist. (Diese analytische Struktur ist dieselbe, die durch die algebraische Struktur auf $\mathrm{Pic}(A)$ induziert wird, falls A algebraisch ist; siehe 3.2)
Obige Sequenz kann (siehe Abschnitt A.2) durch die Gruppenkohomologie von $L_\mathbb{Z}$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} H^1(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}(\mathrm{Lie}(A))) \longrightarrow H^1(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}^*(\mathrm{Lie}(A))) \\ \xrightarrow{\delta} H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}(\mathrm{Lie}(A))) \end{aligned}$$

Die Abbildung $H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to H^2(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}(\mathrm{Lie}(A)))$ ist gerade die Projektion auf $H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{C})^{(0,2)}$, ihr Kern sei mit $NS(A)$ bezeichnet. Hieraus folgt, da die Elemente in $H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ reell sind:

$$NS(A) \hookrightarrow H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{C})^{(1,1)}.$$

Es gilt nach Abschnitt A.2:

$$H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \Lambda^2 L_\mathbb{Z}^*,$$

wobei beide Seiten als Funktionen $L_\mathbb{Z} \times L_\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ aufgefasst wurden (Für die Elemente aus $H^2(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ kann man alternierende Vertreter wählen. Achtung: Diese Wahl unterscheidet sich von derjenigen in [14]). Also erfüllen die Elemente aus $NS(A)$ automatisch die Eigenschaften einer Polarisation bis auf die Bedingung (ii).
Die Abbildung δ besitzt ein Inverses auf $NS(A)$:

$$\begin{aligned} s: NS(A) &\to H^1(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}^*(\mathrm{Lie}(A))) \\ \phi &\mapsto \left\{x \mapsto e^{2\pi i \phi(p(x)+2z,\overline{p(x)})}\right\}, \end{aligned}$$

denn für $x, y \in L_\mathbb{Z}$ und für alle $z \in \mathrm{Lie}(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} \delta(s(\phi))(x,y) &= \phi(p(x+y)+2z,\overline{p(x+y)}) - \phi(p(x)+2(z+y),\overline{p(x)}) - \phi(p(y)+2z,\overline{p(y)}) \\ &= (\phi(p(x),\overline{p(y)}) - \phi(p(y),\overline{p(x)})) = \phi(p(x)+\overline{p(x)},p(y)+\overline{p(y)}) \\ &= \phi(x,y). \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} NS(A) \times H^1(L_\mathbb{Z},\mathbb{Z})\backslash H^1(L_\mathbb{Z},\mathcal{O}^*(\mathrm{Lie}(A))) &\cong \mathrm{Pic}(A) \\ \phi \times \alpha &\mapsto [\phi,\alpha] := \left\{x \mapsto e^{2\pi i(\alpha(x)+\phi(p(x)+2z,\overline{p(x)}))}\right\} \end{aligned}$$

und unter Beachtung von $\alpha(x) = \alpha(\overline{p(x)})$:

$$[\phi, \alpha] \;=\; \left\{ x \mapsto e^{2\pi i \left(\alpha + \phi(p(x)+2z)\right)\left(\overline{p(x)}\right)} \right\}$$

wobei ϕ nun, wie oben, als Abbildung $\mathrm{Lie}(A) \to \overline{\mathrm{Lie}(A)^*}$ aufgefasst wurde. Daraus folgt

$$T_a^*[\phi, \alpha] = [\phi, \alpha + 2\phi(a)]$$

für die Translation

$$T_a : A \to A$$

und durch Übersetzen in die Kohomologie auf A für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$:

$$2\delta(\mathcal{L}) = \left\{ a \mapsto T_a^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1} \right\}.$$

Die Abbildung 2δ läßt sich in der Form $\{a \mapsto T_a^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1}\}$ in die algebraische Sprache übersetzen (siehe 3.2).

(2.2.1) Satz. Sei die Polarisationsbedingung 1.5.1(ii) für $\phi = 2\delta(\mathcal{L}) \in (L^* \otimes L^*)^{(1,1)}$ erfüllt, d. h. $p^*\phi(ix, x) > 0$ auf $\mathrm{Lie}(A) - \{0\}$. Es gilt dann:

i. $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ definiert eine projektive Einbettung von A.

ii. $\dim H^0(A, \mathcal{L}) = \mathrm{Pf}(\phi) = \sqrt{\# \ker \phi} = \prod d_i$,
   wobei ϕ rechts als Abbildung $A \to {}^tA$ aufgefasst wurde, siehe oben.

Insbesondere hat A die Struktur einer algebraischen abelschen Varietät. Umgekehrt ist ϕ eine Polarisation, falls $\mathcal{L}$ ample ist.

Es gilt ferner durch Vergleich mit der Gruppenkohomologie von $L_{\mathbb{Z}}$:

$$H^0(A, [\phi, \alpha]) \cong H^0(L_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\mathrm{Lie}(A))_{[\phi,\alpha]}) \tag{1}$$

Die rechten Funktionen sind Invarianten unter der getwisteten Operation, d. h. sie erfüllen

$$f(z) = e^{2\pi i(\alpha + \phi(p(x)+2z))(\overline{p(x)})} f(z + x)$$

und werden Thetafunktionen genannt.
Man kann das so auffassen:

$$(z, v) \mapsto (z, e^{2\pi i(\alpha + \phi(p(x)+2z))(\overline{p(x)})} v)$$

ist eine Operation auf dem trivialen Linienbündel $\mathrm{Lie}(A) \times \mathbb{C}$. Der Quotient ist das zu $[\Phi, \alpha]$ korrespondierende Linienbündel auf A und es gibt ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(A) \arrow[r, "e_1,\ldots,e_{N+1}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^N \\ A \arrow[ur, "\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_{N+1}"'] & \end{tikzcd}$$

wobei die $e_1, \ldots, e_{N+1}$ eine Basis von $H^0(L_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\mathrm{Lie}(A))_{[\phi,\alpha]})$ bilden, also invariante Schnitte des Bündels $\mathrm{Lie}(A) \times \mathbb{C}$ sind und die $\widetilde{e}_i$ dieselben Schnitte des Quotientenbündels und auch die Bilder unter dem Isomorphismus (1).

(2.2.2) Wähle nun $N, \mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_g), V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ und betrachte die Kategorie

$$pav_{g,\mathbf{d},B,N}$$

mit den Objekten $(\mathcal{X}, \phi, \gamma)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Polarisation

$$\phi : \mathcal{X} \to {}^t\mathcal{X}$$

mit

$$\ker \phi_p \cong (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})^2 \times \ldots (\mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^2 \quad d_1 | \cdots | d_g$$

für alle $p \in B$ und einer Level-N-Struktur

$$\gamma : [(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B] \to \mathcal{X}[N].$$

Dabei ist γ eine symplektische Ähnlichkeit bzgl. der Formen auf $V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ und $[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}] \cong A[N]$, falls $(N, \prod d_i) = 1$, ansonsten soll γ lokal von einer symplektischen Ähnlichkeit $(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})_U \to \varprojlim \ \mathcal{X}_U[M]$ induziert werden. Morphismen $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sollen mit der Polarisation verträglich sein, in dem Sinne, dass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{X}}} & {}^t\mathcal{X} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^t\alpha} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow[\phi_{\mathcal{Y}}]{} & {}^t\mathcal{Y} \end{array}$$

kommutiert. Ebenso sollen die Level-N-Strukturen ineinander überführt werden, wie im vorigen Abschnitt.

(2.2.3) Bilde ebenso die Kategorien $\mathbb{Q}pav_{g,B,K}$, mit den Objekten $(\mathcal{X}, \phi, \xi K)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Polarisation $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}, {}^t\mathcal{X})$ und einer K-Level-Strutur:

$$\xi_i K : [V_{\mathbb{A}_f}|_{U_i}] \to (\varprojlim_N \mathcal{X}_{U_i}[N]) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$$

(ebenfalls symplektische Ähnlichkeit). Morphismen sind diejenigen aus $\mathbb{Q}av_{g,B}$ die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{X}}} & {}^t\mathcal{X} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^t\alpha} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow[\phi_{\mathcal{Y}}]{} & {}^t\mathcal{Y} \end{array}$$

bis auf einen $\mathbb{Q}$-Skalar kommutativ machen und mit ξK verträglich sind.

(2.2.4) Es gibt dann Äquivalenzen

$$pav_{g,\mathbf{d},B,N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(GSp, V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}, X_{pol}^{-1}, N)$$

$$\mathbb{Q}pav_{g,B,K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(GSp, V_{\mathbb{Q}}, X_{pol}^{-1}, K)$$

(X_{pol}^{-1} ist die Konjugationsklasse, die diejenigen Morphismen h enthält, die bzgl. der symplektische Standardform auf $V_{\mathbb{Q}}$ zu einer polarisierten Hodgestruktur gehören, siehe 1.5.3). Dabei sind die unteren Kategorien zu den oberen äquivalent für $K = K(N)$, der bzgl. $V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ gebildeten Gruppe (1.10).

Beweis. Die Polarisation auf $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ führt zu einer symplektischen Form auf $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ bis auf Skalare; dies ist ein mod $GSp(\mathbb{Q})$ bzw. $GSp(\mathbb{Z})$ eindeutiger Isomorphismuss

$$\alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}|_{U_i} \to (V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}})_{U_i} \quad \text{bzw,} \quad \alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}|_{U_i} \to (V_{\mathbb{Q}})_{U_i}$$

(eine GSp-Struktur). Die Polarisationsbedingung (i) bedeutet, dass die Morphismen h (die zu den punktweisen Hodgestrukturen gehören) über GSp faktorisieren und die Bedingung (ii), dass h in X_{pol}^{-1} liegt. Die Level-Strukturen übersetzen sich in die abstrakt definierten, da gefordert wurde, dass sie symplektische Ähnlichkeiten sind.
Im ersten Fall führen zwar die Morphismen $h \in X_{pol}^{-1}$ nicht alle zu einer Polarisation, doch die Isomorphieklasse enthält eine solche, da die Form ϕ im abstrakten Fall von Isomorphismen nur bis auf das Vorzeichen erhalten werden muss. □

Zerlegung

(2.2.5) Lemma. Sei A eine polarisierte abelsche Varietät und $h : \mathbb{S} \to GSp(L_{\mathbb{R}})$ der Morphismus, der zur Hodgestruktur auf $L_{\mathbb{Q}} = H_1(A, \mathbb{Q})$ gehört und ϕ die symplektische Form. Gleichbedeutend sind:

i. $h : \mathbb{S} \to GL(L_{\mathbb{R}})$ hat einen über $\mathbb{Q}$ definierten invarianten Unterraum, i. e. $L_{1\mathbb{Q}} \subsetneqq L_{\mathbb{Q}}$, $L_{1\mathbb{R}}$ ist invariant unter h.

ii. $L_{\mathbb{Q}} = L_{1\mathbb{Q}} \perp L_{2\mathbb{Q}}$ mit $h = h_1 \oplus h_2$, $h_i : \mathbb{S} \to L_{i\mathbb{R}}$, $L_{i\mathbb{Q}} \subsetneqq L_{\mathbb{Q}}$.

iii. Es gibt eine abelsche Untervarietät $A_1 \subsetneqq A$.

iv. $A \cong A_1 \times A_2$ in $\mathbb{Q}pav_{2g,\mathbb{C}}$.

v. $\mathrm{End}(A)$ ist keine Divisionsalgebra.

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: (ii) ist erfüllt mit $L_{2\mathbb{Q}} = L_{1\mathbb{Q}}^{\perp}$. Die Umkehrrichtung ist trivial.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$: $L_{1\mathbb{Z}} := L_{\mathbb{Z}} \cap L_{1\mathbb{Q}}$ ist ein vollst. Gitter in $L_{1\mathbb{R}}$. Zusammen mit der Einschränkung der Hodgestruktur und Polarisation auf $L_{1\mathbb{Q}}$ liefert dies (mittels Äquivalenz) eine polarisierte

Untervarietät $A_1 \subset A$. Umgekehrt definiert der Raum $H_1(A_1, \mathbb{Q}) \subset H_1(A, \mathbb{Q})$ den geforderten Unterraum, mit der Eigenschaft, dass $L_{1\mathbb{R}}$ h-invariant ist.
$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ $L_{i\mathbb{Z}} := L_{\mathbb{Z}} \cap L_{i\mathbb{Q}}$ sind vollst. Gitter in $L_{i\mathbb{R}}$. Zusammen mit der Einschränkung der Hodgestruktur und Polarisation auf $L_{i\mathbb{Q}}$ liefert dies (mittels Äquivalenz) polarisierte Untervarietäten $A_i \subset A$ mit einer Isogenie $A_1 \times A_2 \to A$. Die Umkehrrichtung folgt wie oben.
$(v) \Leftrightarrow (i)$: klar, da die Elemente aus $\mathrm{End}(A)$ Endomorphismen der Hodgestruktur entsprechen. □

In $pav_{2g,\mathbb{C}}$ muss $A \cong A_1 \times A_2$ nicht gelten, da der Index von $L_{1\mathbb{Z}} + L_{2\mathbb{Z}}$ in $L_{\mathbb{Z}}$ größer 1 sein kann.

(2.2.6) Korollar. $A \cong (A_1 \times \cdots \times A_1) \times \cdots \times (A_n \times \cdots \times A_n)$, in $\mathbb{Q}pav_{2g,\mathbb{C}}$ und $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{Mat}_{m_1}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_1)) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{m_n}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_n))$, wobei die A_i keine komplexen Tori echt enthalten, d. h. *einfach* sind. Die $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_i)$ sind dann Divisionsalgebren.

(2.2.7) Sei eine Zerlegung $V_{\mathbb{Q}} = V_{1\mathbb{Q}} \perp \cdots \perp V_{n\mathbb{Q}}$ gegeben. Sei $(\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0$ die Untergruppe von $\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}})$, mit der Eigenschaft, dass die Ähnlichkeitsfaktoren übereinstimmen. Es gibt dann eine Einbettung

$$(\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0 \hookrightarrow GSp(V_{\mathbb{Q}}),$$

dessen Bild der Stabilisator der obigen Zerlegung ist.
Sei eine kompakt-offene Untergruppe von $GSp(V_{\mathbb{A}_f})$ gegeben und seien K_i Urbilder unter der obigen Einbettung.
Die Produktbildung induziert einen Funktor

$$(\prod \mathbb{Q}pav_{g_i,\mathbb{C},K_i})^0 \hookrightarrow \mathbb{Q}pav_{g,\mathbb{C},K},$$

wobei in der linken Produktkategorie nur Produkte betrachtet werden, bei denen die Ähnlichkeitsfaktoren der K-Level-Strukturen gleich gewählt werden können.
Ihm entspricht die Abbildung von Shimuravarietäten

$$Sh_{(\prod K_i)^0}((\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0, X_{pol}^{-1}) \to Sh_K(GSp(V_{\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1}),$$

die durch die obige Inklusion von Gruppen induziert wird.
Sei ein Tripel (A, ϕ, ξ) gegeben und sei A isogen zu einem Produkt wie im letzten Korollar und die K-Level-Struktur respektiere die Zerlegung. Das Tripel ist dann isomorph zu einem Objekt im Bild einer der obigen Produkt-Funktoren.

2.3 Komplexe Multiplikation

In diesem Abschnitt werden die Funktoren (1.13)

$$\iota_c^* : \mathcal{H}(H, V_{\mathbb{Z}}, Y, N)_B \to \mathcal{H}(GL_{2g}, V_{\mathbb{Z}}, X^{-1}, N)_B$$

$(c \in H(\mathbb{A}_f), (N, \operatorname{ind}(H, V_{\mathbb{Z}})) = 1$ und

$$\iota^* : \mathcal{H}(H, V_{\mathbb{Q}}, Y, \iota^{-1}K)_B \to \mathcal{H}(GL_{2g}, V_{\mathbb{Q}}, X^{-1}, K)_B,$$

für solche Einbettungen $\iota : H \hookrightarrow GL_{2g}$ untersucht, deren Bild in GL_{2g} die Fixgruppe gewisser Endomorphismen $(E_i)_{i\in I} \subseteq (V_{\mathbb{Z}} \otimes V_{\mathbb{Z}}^*)$ ist.
Die Objekte in den Bildern der ersten Funktoren sind dann diejenigen

$$[\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, \{\mathcal{F}^p\}, \gamma],$$

für die gewisse $E_i' \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}^* \cap \operatorname{End}(\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^{(0,0)}$ und lokale Isomorphismen

$$\alpha_i : \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}|_{U_i} \to ({}^cV_{\mathbb{Z}})_{U_i},$$

mit $\alpha_i^* E_i' = E_i$ existieren (analog für die zweiten). Die Endomorphismen E_i' dieser Hodgestrukturen entsprechen (mittels Periodenfunktor) Endomorphismen von abelschen Varietäten über B. Insbesondere untersuchen wir hier die Situation, in der die Endomorphismen durch eine Operation

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \operatorname{End}(V_{\mathbb{Z}})$$

einer Ordnung $\mathcal{O}$ in einem Zahlkörper $F = \operatorname{Quot}(\mathcal{O})$ gegeben sind. Wir fordern dabei im folgenden immer:

$$\mathcal{O} = \{x \in F \mid xV_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}\}.$$

Die Fixgruppe dieser Endomorphismen in $G = GL_{2g}$ ist über $\mathbb{Q}$ charakterisiert durch

$$\begin{aligned} H(R) &= \{\phi \in GL(V_R) \mid \phi \text{ ist } F\text{-linear}\} \\ &\cong GL_r(R \otimes_{\mathbb{Q}} F) = R_{F/\mathbb{Q}} GL_r(R), \end{aligned}$$

für jede $\mathbb{Q}$-Algebra R, $(r = 2g/\dim(F))$, d. h. $G \cong R_{F/\mathbb{Q}} GL_r$.

(2.3.1) Betrachte nun die Kategorie $\mathcal{O}_c^{(\iota)} av_{2g,B,N}$ mit den Objekten $(\mathcal{X}, i, \gamma)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Abbildung $i : \mathcal{O} \to \operatorname{End}(\mathcal{X})$, mit $i(\mathcal{O}) \otimes \mathbb{Q} \cap \operatorname{End}(A) = i(\mathcal{O})$ und einer $\mathcal{O}$-linearen Level-N-Struktur $\gamma : ({}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B \to A[N]$, mit der Eigenschaft

$$\exists \text{ lokale Isomorphismen } \alpha_i : ({}^cV_{\mathbb{Z}})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}|_{U_i}$$

mit $\alpha^* i = \iota$. Abbildungen sind diejenigen $\beta \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, die mit den Abbildungen i und γ verträglich sind.

(2.3.2) Betrachte ebenfalls Kategorie $F^{(\iota)} av_{2g,B,K}$ mit den Objekten $(\mathcal{X}, i, \xi)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Abbildung $i : F \to \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X})$, mit und einer F-linearen K-Level-Struktur mit der Eigenschaft

$$\exists \text{ lokale Isomorphismen } \alpha_i : (V_{\mathbb{Q}})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}|_{U_i}$$

mit $\alpha^* i = \iota$. Abbildungen sind diejenigen $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, die mit den Abbildungen i und ξ verträglich sind.

Es gibt dann Äquivalenzen zwischen den so konstruierten Kategorien (im Fall $K = K(N)$), die sich in ein Diagramm wie folgt einfügen:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_X \mathcal{H}(R_{F/\mathbb{Q}}GL_r,V_{\mathbb{Q}},X,K(N))_B \arrow[rrr, "\sim"] \arrow[ddd, "\iota^*"'] & & & F^{(\iota)}av_{2g,B,K(N)} \arrow[ddd] \\
& \bigcup_{X,[c]\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O})} \mathcal{H}(R_{F/\mathbb{Q}}GL_r,{}^cV_{\mathbb{Z}},X,N)_B \arrow[ul, "\cup c"', "\sim"] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\cup\iota_c^*"'] & \bigcup_{[c]\in\mathrm{Pic}(\mathcal{O})} \mathcal{O}_c^{(\iota)}av_{2g,B,N} \arrow[ur, "\sim", "\cup c"'] \arrow[d, "\cup c"] & \\
& \mathcal{H}(GL,V_{\mathbb{Z}},X^{-1},N)_B \arrow[r, "\sim"] \arrow[dl, "\sim"'] & av_{2g,B,N} \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathcal{H}(GL,V_{\mathbb{Q}},X^{-1},K(N))_B \arrow[rrr, "\sim"] & & & \mathbb{Q}av_{2g,B,K(N)}
\end{tikzcd}$$

Zahlkörperfall, CM-Typ

Speziell aus $\dim(F) = 2g$, F ein Zahlkörper, folgt $G = R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ - dieser Torus wird im folgenden mit F^x bezeichnet. Dafür, dass dann ein Morphismus h existiert, ist notwendig und hinreichend, dass L in einem total komplexen Körper liegt.
Der Funktor X^*, der jedem Torus über $\mathbb{Q}$ seine Charaktergruppe zuordnet, ist bereits eine Antiäquivalenz der Kategorie der $\mathbb{Q}$-Tori mit der Kategorie der endlich-dimensionalen Gitter mit Galois-Linksoperation. Für den Torus F^x haben wir

$$X^*(F^x) \cong \bigoplus_{\gamma:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{Z}[\gamma]$$

und der Torus ist hierdurch also bis auf Isomorphie festgelegt. (Die Galoisgruppe der Galoischen Hülle operiert auf den Einbettungen von links.)
Kocharaktergitter $X_*(F^x)$ hat man eine entsprechende duale Basis, die ebenfalls mit den komplexen Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ identifiziert werden kann. Hier operiert die Galoisgruppe auf dieselbe Weise.

(2.3.3) Wir untersuchen die möglichen Einbettungen $h : \mathbb{S}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G$. Solche sind gegeben durch einen $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ äquivarianten Morphismus

$$h_* : X_*(\mathbb{S}) \to X_*(R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m) = \bigoplus_{\gamma:F\to\mathbb{C}} \mathbb{Z}[\gamma].$$

Durch die Gewichtsbedingungen erhalten wir:

$$h_*(a,b) = a\Phi + b\rho\Phi,$$

wobei $\Phi = \sum_{i=1..g}\gamma_i$ und $\{\gamma_i\}_{i=1..g}$ eine Teilmenge von komplexen Einbettungen von F ist. Wir nennen sie den *CM-Typ* von h bzw. (A,i) (vgl. auch 1.2.6). Es gilt $\Phi+\overline{\Phi} = \sum_{\gamma\in\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}\gamma$. Die Operation von F auf $V^{-1,0} = \mathrm{Lie}(A)$ zerfällt in die direkte Summe der γ_i.

Die Familie der X oben besteht gerade aus 2^g verschiedenen Morphismen. (Die Vertauschungen $\gamma_i \leftrightarrow \overline{\gamma_i}$ erzeugen alle CM-Typen).

Struktur

Dieser Unterabschnitt enthält einige wohlbekannte Resultate bzgl. der Struktur von abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation in der Sprache der algebraischen Tori.
Sei K der kleinste Teilkörper von F Körper mit der Eigenschaft, dass h wie folgt faktorisiert:

$$h : \mathbb{S}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow K^x \hookrightarrow F^x,$$

wobei die rechte Inklusion durch die Inklusion der Körper induziert werde. K ist dann wiederum total imaginär, also insbesondere von gerader Dimension. Sei $\dim K = 2k$ und $\dim F = 2g = 2kn$.
$V_{\mathbb{Q}}$ zerfällt bzgl. der Operation von K^x wie folgt über $\mathbb{Q}$:

$$V_{\mathbb{Q}} \cong W_{\mathbb{Q}}^n,$$

$(W_{\mathbb{Q}} \cong K)$.

(2.3.4) Lemma. Sei L die galoissche Hülle von F und sei eine feste Einbettung $L \hookrightarrow \mathbb{C}$ gewählt.
Sei

$$S := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \mid \sigma|_F \in \Phi\}$$

die Menge derjenigen Elemente, die Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ aus Φ induzieren.
Es gilt dann:

$$\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \mid S \circ \sigma = S\}$$

Beweis. Wir fassen beide Tori als in $R_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ eingebettet auf, d. h. wir haben:

$$h : \mathbb{S}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow K^x \hookrightarrow F^x \hookrightarrow L^x,$$

wobei bzgl. der obigen Einbettung

$$X_*(R_{L/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}[Gal(L/\mathbb{Q})].$$

gilt. Die Abbildung h_* ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} h_*X_*(\mathbb{S}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})] \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 \sum_{s \in S} [s] + z_1 \sum_{s \in S} [\rho \circ s] \end{array}$$

Ferner ist

$$X_*(K^x) = \{\xi \in \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})] \mid \xi \circ \sigma = \xi \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)\}.$$

Daraus folgt sofort die Aussage. $\square$

(2.3.5) Lemma. Sei A die zu der durch $h : \mathbb{S}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow F^x \hookrightarrow GL_{2g}$ gegebenen Hodgestruktur korrespondierende abelsche Varietät.

i. Es existiert eine Isogenie

$$A \to B \times \cdots \times B \qquad (n \text{ Faktoren}),$$

ii. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(B) = K^*$,

iii. $\mathrm{Stab}(h, GL(\mathbb{R})) \cap GL_{2g}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(A) \cong GL_n(K)$.

Beweis. h faktorisiert über $R_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \subseteq R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$. Dies definiert eine über $\mathbb{Q}$ definierte h-invariante Zerlegung $V_{\mathbb{Q}} = W_{\mathbb{Q}}^n$, daher das erste Resultat (nach Lemma 2.2.5).
Die dritte Aussage folgt sofort aus den ersten beiden. Um die zweite zu beweisen genügt es, sich auf den Fall $K = F$ zu beschränken. Wir haben zu zeigen:

$$\mathrm{Stab}(h, GL(\mathbb{R})) \cap GL_{2g}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(A) \cong F^*$$

$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(A)$ ist offenbar enthalten in allen ${}^{\sigma}\,\mathrm{Stab}(h, GL)(\mathbb{C})$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})$. Sei $\mathfrak{t} := \mathrm{Lie}(F^x, \mathbb{C})$. Es gilt

$$\mathrm{Lie}({}^{\sigma}\mathrm{Stab}(h, GL(\mathbb{C}))) = \mathfrak{t} \oplus \{\mathfrak{g}_{[\alpha]-[\beta]} | \alpha, \beta \in \sigma \circ \Phi \text{ oder } \alpha, \beta \in \sigma \circ \overline{\Phi}\}$$

Wir nehmen an, ein $\mathfrak{g}_{[\alpha]-[\beta]}$ liege im Schnitt aller dieser Liegruppen. Sei wiederum $S \subset \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ der Lift von Φ auf die galoissche Hülle L von F. Es gibt dann σ und τ mit

$$\sigma|_F = [\alpha] \quad \text{und} \quad \tau|_F = [\beta]$$

Falls nun eine $s \in S$ gegeben ist, folgt:

$$(s\sigma^{-1})\sigma = s \in S$$

daher auch

$$(s\sigma^{-1})\tau \in S$$

daher ist

$$S\sigma^{-1}\tau = S$$

Daraus folgt nun, da $K = F$, $\sigma^{-1}\tau \in \mathrm{Gal}(L|F)$, das heißt aber $[\alpha] = [\beta]$, somit ist der Schnitt aller ${}^{\sigma}\,\mathrm{Stab}(h, GL(\mathbb{C}))$ nur der Torus F^x. □

(2.3.6) Korollar. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i. A ist einfach

ii. $K = F$

iii. $\mathrm{Gal}(L|F) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \mid \; S \circ \sigma = S\}$ bzw. im Falle F galoissch:
$\{\mathrm{id}\} = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(F|\mathbb{Q}) \mid \; S \circ \sigma = S\}$

2.4 Komplexe Multiplikation und Polarisation

Sei wiederum eine Operation einer Ordnung $\mathcal{O}$ in einem algebraischen Zahlkörper $F = \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$ auf $V_{\mathbb{Z}}$ gegeben, mit der Eigenschaft

$$\mathcal{O} = \{x \in F \mid xV_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}\}$$

und $\dim F = 2g$.
Betrachte jetzt die Funktoren

$$\iota_c^* : \mathcal{H}(H, {}^cV_{\mathbb{Z}}, \{h\}, N)_B \to \mathcal{H}(GSp, V_{\mathbb{Z}}, X_{pol}^{-1}, N)_B$$

($c \in H(\mathbb{A}_f)$) und

$$\iota^* : \mathcal{H}(H, V_{\mathbb{Q}}, \{h\}, \iota^{-1}K)_B \to \mathcal{H}(GSp, V_{\mathbb{Q}}, X_{pol}^{-1}, K)_B$$

für solche Einbettungen $\iota : H \hookrightarrow GSp$, deren Bild in GSp die Fixgruppe der gewählten Operation von $\mathcal{O}$ ist.
H kann dann als Untertorus des Torus F^x aufgefasst werden. Er muß offensichtlich

$$\iota(H) = GSp \cap \iota(F^x)$$

erfüllen. Bezeichne $X \mapsto {}^tX$ die Adjunktion bzgl. der symplektischen Form auf $V_{\mathbb{Q}}$ und sei $h : \mathbb{S}_R \hookrightarrow H_{\mathbb{R}}$ ein zulässiger Morphismus (i. e. $\iota \circ h \in X_{pol}^{-1}$). Falls der CM-Typ einfach ist, gilt

$$\mathrm{Stab}(h, GL(\mathbb{R})) \cap GL_{2g}(\mathbb{Q}) = \iota(F^x)(\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(A)$$

wobei A die korrespondierende abelsche Varietät ist. Die linken Gruppen sind selbstadjungiert, daraus folgt[2]:

$${}^t\iota(F^x) = \iota(F^x) \tag{2}$$

oder äquivalent:

$${}^ti(F) = i(F).$$

Es ist zweckmäßig, diese Bedingung im folgenden zu fordern, aber nicht notwendig die Einfachheit des CM-Typs. Aus dieser Bedingung folgt insbesondere:

(2.4.1) Satz. i. F ist ein CM-Körper[3] und für $x \in F^x(\mathbb{Q}) \cong F^*$ gilt

$$\iota(\overline{x}) = {}^t\iota(x).$$

ii. $\iota(H)$ ist maximal in GSp und $H \cong T_F$.

[2]Da es für die $\mathbb{Q}$-Punkte gilt, muss es für den ganzen Torus gelten.
[3]d. h. ist total komplex und die komplexe Konjugation vertauscht mit allen komplexen Einbettungen; äquivalent: eine total komplexe quadratische Erweiterung eines total reellen Teilkörpers

(2.4.2) Der Torus T_F ist durch das Untergitter

$$X_*(T_F) \subseteq X_*(R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m) = \bigoplus_{\rho:F\to\mathbb{C}} \mathbb{Z}[\rho]$$

mit

$$X_*(T_F) = \left\{\alpha \in X_*(R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m) \;\middle|\; (\sigma-1)(\rho+1)\alpha = 0 \forall\sigma\in G\right\}$$

gegeben. Er wird beschrieben durch die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow T_F \xrightarrow{\lambda\times incl.} \mathbb{G}_m \times R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \xrightarrow{incl./N_{F/F^+}} R_{F^+/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow 0\,. \tag{3}$$

Beweis der Exaktheit der Sequenz. Sei $\mathrm{tr} = \sum_{\alpha:F\hookrightarrow\mathbb{C}}[\alpha]$. Wir identifizieren $\mathbb{G}_m$ mit der diagonalen Einbettung in $R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ und daher $X_*(\mathbb{G}_m)$ mit $\mathbb{Z}\,\mathrm{tr}$. Für die Kocharaktere ist dann

$$\begin{aligned}
X_*(\mathbb{G}_m \times R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m) &= \mathbb{Z}\,\mathrm{tr} \times \left\{\sum_{\alpha:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \xi_\alpha[\alpha]\right\}\\
X_*(T_F) &= \{\xi = \sum_{\alpha:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \xi_\alpha[\alpha] \;|\\
&\quad (\sigma-1)(\rho+1)\xi = 0 \;\;\forall\sigma\in G\}\\
X_*(R_{F/\mathbb{Q}}F^+) &= \left\{\xi = \sum_{\alpha:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \xi_\alpha[\alpha] \;|\; (\rho-1)\xi = 0\right\}\\
X_*(\lambda\times incl.) &: \xi \mapsto (\xi+\rho\xi)\times\xi\\
X_*(N_{F/F^+}/incl.) &: (z\,\mathrm{tr})\times\xi \mapsto (\xi+\rho\xi - z\,\mathrm{tr}).
\end{aligned}$$

Die entsprechende Sequenz der Kocharaktere ist also exakt. Damit ist auch die obere Sequenz exakt. □

Beweis von Satz 2.4.1. Wegen der Bedingung (2) ist $\iota(F^x)$ mittels $\gamma\in GSp(\mathbb{C})$ zum Diagonaltorus $\widetilde{D}\subset GL$:

$$\gamma\widetilde{T}\gamma^{-1} = \widetilde{D}.$$

Dies identifiziert die Einbettungen $\rho_i : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ (Basis von X_*) mit den Diagonaleinträgen von $\widetilde{D}$, i. e.

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_\gamma \circ \iota : F^* &\to \widetilde{D}\\
x &\mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_{2g}(x)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt zunächst nach Abschnitt 1.5, dass das Bild von $\overline{\gamma}\gamma^{-1}$ in $W(D,\mathbb{R})$ von der Form $\mathrm{id}\times\{-1,\cdots,-1\}$ sein muss. Dieses Element liegt im Zentrum von W. Somit ist F ein CM-Körper. Offenbar wirkt die Adjunktion aber genauso wie dieses Weyl-Element (sogar auf $\widetilde{D}$). Dies beweist (i).

$D \subset \widetilde{D}$ ist der Untertorus mit der Eigenschaft

$$\alpha_1 \alpha_{g+1} = \cdots = \alpha_g \alpha_{2g}$$

Dies übersetzt sich mittels dieser Identifikation gerade in die definierenden Relationen für T_F. Dies beweist (ii). $\square$

Für beliebige maximale $\mathbb{Q}$-Tori, über die ein Morphismus h faktorisiert, hat man den

(2.4.3) Satz. Sei ein $h \in X_{pol}^{-1}$ gegeben und sei T ein maximaler $\mathbb{Q}$-Torus in GSp, über den h faktorisiert. Falls $V_{\mathbb{Q}}$ keinen echten Unterraum $V_{1\mathbb{Q}}$ hat, mit $V_{1\mathbb{R}}$ h-invariant, so ist $T = \widetilde{T} \cap GSp$, mit $\widetilde{T} \cong F^x$ und $\widetilde{T}' = \widetilde{T}$. Insbesondere gelten dann die Aussagen des vorigen Satzes.

Beweis. Sei $\widetilde{T}$ ein maximaler $\mathbb{Q}$-Torus in $GL(V_{\mathbb{Q}})$ mit $T \subset \widetilde{T}$. Sein Typ ist durch einen Homomorphismus von $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})$ in $W(D)$ gegeben (ein Element von $H^1(\mathbb{Q}, W(D))$ - siehe A.1), wobei D der Diagonaltorus in $GL(V_{\mathbb{Q}})$ ist. Die zugehörige Operation ist transitiv; ansonsten gäbe es einen unter $\widetilde{T}(\mathbb{Q})$ invarianten echten Unterraum $V_{1\mathbb{Q}}$ und $V_{1\mathbb{R}}$ wäre dann natürlich h-invariant. Daraus folgt $\widetilde{T} \cong F^x$ für einen Zahlkörper F vom Grad $2g$ (der Stabilisator eines Diagonaleintrages in obiger Operation muss Index $2g$ haben.). Da die Darstellung h keinen über $\mathbb{Q}$-definierten Unterraum hat, ist der CM-Typ einfach und es gilt automatisch $\widetilde{T}' = \widetilde{T}$ (siehe Bemerkung zu Beginn des Abschnittes). Damit ist Satz 2.4.1 anwendbar. $\square$

(2.4.4) Bemerkung. Falls h einen über $\mathbb{Q}$-definierten invarianten Unterraum hat, ist der Satz i. a. falsch. Falls die zugehörige abelsche Varietät A ein Produkt von abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation durch disjunkte Körper ist, ist der Torus z. B. ein Fastprodukt von zwei Tori der Form T_F. Falls A ein Produkt von abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation durch denselben Körper ist, so muss der Splitkörper eines maximalen Torus, über den h faktorisiert, kein CM-Körper mehr sein, da es in diesem Fall zu viele (aber irrelevante) Automorphismen gibt (vgl. Lemma 2.3.5).

(2.4.5) Es sollen jetzt alle möglichen Einbettungen

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}} \overset{h}{\hookrightarrow} T_F \hookrightarrow GSp$$

klassifiziert werden.
Wähle irgendeine Operation $F \to \mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}})$ und einen Vektor $v_0 \in V_{\mathbb{Q}}$; ein beliebiges $\beta_0 \in F^- \setminus \{0\}$ definiert dann die symplektische Form

$$\langle xv_0, yv_0 \rangle_{\beta_0} := \mathrm{tr}(\beta_0 x \overline{y}).$$

auf $V_{\mathbb{Q}}$. Ein Automorphismus von $V_{\mathbb{Q}}$ der diese Form in die Standardform überführt, konjugiert die zu der gewählten Operation gehörende Einbettung $\iota' : F^x \hookrightarrow GL(V_{\mathbb{Q}})$ in eine Einbettung ι^0, die

$$\iota^0(F^x) = \iota^0(F^x)'$$

erfüllt (nach Konstruktion der Form oben). Dies definiert eine Einbettung

$$\iota^0 : F^x \supset T_F \hookrightarrow GSp.$$

und für diese gilt:

$$\langle \iota^0(x)v_0, \iota^0(y)v_0 \rangle = \mathrm{tr}(\beta_0 x\overline{y}).$$

(2.4.6) Eine beliebige Einbettung

$$\iota : T_F \hookrightarrow GSp.$$

bestimmt nun ein Element von $H^1(\mathbb{Q}, T_F)$ durch den Vergleich mit der Einbettung ι^0 (siehe Abschnitt A.1). Die Gruppe berechnet sich durch die lange exakte Kohomologiesequenz assoziiert zur Sequenz (3):

$$\mathbb{Q}^* \times F^* \xrightarrow{incl./N_{F/F^+}} (F^+)^* \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}, T_0) \longrightarrow 0 = H^1(F, \mathbb{G}_m)$$

i. e.

$$H^1(\mathbb{Q}, T_F) \cong (F^+)^*/N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*.$$

Wir denken uns ι und ι^0 als Einbettungen $F^x \hookrightarrow GL$ mit $\iota(F^x) \cap GSp = \iota(T_F)$ (bzw. $\iota^0(F^x) \cap GSp = \iota^0(T_F)$); siehe oben.

(2.4.7) Satz. Für jeden Repräsentanten $\alpha \in (F^+)^*$, der die Einbettung $\iota : T_F \hookrightarrow GSp$ in $H^1(\mathbb{Q}, T_F) \cong F^{+*}/(N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*)$ beschreibt, gibt es ein $v \in V_{\mathbb{Q}}$ mit

$$\langle \iota(x)v, \iota(y)v \rangle \sim \mathrm{tr}(\beta x\overline{y})$$

für $x, y \in F^x(\mathbb{Q}) = F^*$ und

$$\alpha\beta = \beta_0,$$

Ein Morphismus $h : \mathbb{S} \to T_F \hookrightarrow GSp$ mit CM-Typ Φ, der zu einer Polarisation gehört, existiert genau dann, wenn

$$\Im(\phi(\beta)) > 0 \text{ für alle } \phi \in \Phi$$

Beweis. Bzgl. eines $\gamma \in GSp(\mathbb{C})$ ist

$$\gamma\iota\gamma^{-1} = \iota^0.$$

Man berechnet dann für $x, y \in F^x(\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned}\langle \iota^0(x)v_0, \iota^0(y)v_0 \rangle &= \langle \gamma\iota(x)\gamma^{-1}v_0, \gamma\iota(y)\gamma^{-1}v_0 \rangle \\ &= \langle \gamma x\delta^{-1}\delta\gamma^{-1}v_0, \gamma y\delta^{-1}\delta\gamma^{-1}v_0 \rangle\end{aligned}$$

wobei $\delta^\sigma\delta^{-1} = \gamma^\sigma\gamma^{-1}$, aber $\delta \in \iota^0(F^x(\mathbb{C}))$. Es gilt dann $\alpha = N_{F/F^+}\delta \in R_{F^+/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m(\mathbb{Q}) = F^+$. Ferner ist trivialerweise $\delta\gamma^{-1} \in \mathbb{Q}$, so dass wir mit $v := \delta\gamma^{-1}v_0$ erhalten:

$$\begin{aligned}\langle\gamma\iota(x)\delta^{-1}\delta\gamma^{-1}v_0, \gamma\iota(y)\delta^{-1}\delta\gamma^{-1}v_0\rangle &= \lambda_\gamma\langle\delta\delta'\iota(x)v, \iota(y)v\rangle \\ &= \lambda_\gamma\langle N_{F/F^+}(\delta)\iota(x)v, \iota(y)v\rangle \\ &= \lambda_\gamma\langle\alpha\iota(x)v, \iota(y)v\rangle\end{aligned}$$

Es gilt also für die Einbettung ι und alle $x, y \in F^x(\mathbb{Q}) = F^*$:

$$\langle\iota(x)v, \iota(y)v\rangle \sim \mathrm{tr}(\beta_0\alpha^{-1}x\overline{y}).$$

wobei α die Einbettung ι relativ zu ι_0 beschreibt.
Ersetzen des Vektor v_0 durch einen anderen oder Skalieren der Form um einen Faktor in $\mathbb{Q}^*$ ändert α nur innerhalb der Klasse

$$\alpha N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*$$

Dieses ist ebenfalls genau eine Klasse in $H^1(\mathbb{Q}, T_F)$.
Ferner wissen wir aus Abschnitt 1.5, dass nur ein Morphismus $h \hookrightarrow T_F$ möglich ist, mit der Eigenschaft, dass $\iota \circ h$ zu einer Polarisation führt. Die Vorzeichen des diagonalisierten $h(i)$ müssen genau mit den Vorzeichen des diagonalisierten β übereinstimmen, wie man durch den Vergleich obiger Rechnung mit dem Beweis von Lemma 1.5.2 erhält. □

(2.4.8) Betrachte nun die Kategorie $\mathcal{O}_c^{(\iota)}pav_{2g,\mathbf{d},B,N}$ mit den Objekten $(\mathcal{X}, \phi, i, \gamma)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Abbildung $i : \mathcal{O} \to \mathrm{End}(\mathcal{X})$, mit $i(\mathcal{O}) \otimes \mathbb{Q} \cap \mathrm{End}(\mathcal{X}) = i(\mathcal{O})$, einer Polarisation $\phi : \mathcal{X} \to {}^t\mathcal{X}$ und einer $\mathcal{O}$-linearen, Level-N-Struktur (symplektische Ähnlichkeit[4]) $\gamma : ({}^cV_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_B \to \mathcal{X}[N]$, mit der Eigenschaft

$$\exists \text{ lokale symplektische Ähnlichkeiten } \alpha_i : ({}^cV_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}})_{U_i} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}|_{U_i},$$

mit $\alpha^*i = \iota$ und für die Form $r^{-1}\phi$ auf ${}^cV_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$. Dabei ist r die positive rationale Zahl mit $c\overline{c}\widehat{\mathbb{Z}} = r\widehat{\mathbb{Z}}$. Die Form ist ebenfalls vom Typ $\mathbf{d}$ auf ${}^cV_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$.

Die Änderung der Form hat den Sinn, dass dann der offensichtliche Funktor

$$\mathcal{O}_c^{(\iota)}pav_{2g,\mathbf{d},B,N} \to pav_{2g,\mathbf{d},B,N}$$

die Polarisation nicht ändern muss (und wirklich nur ein Vergissfunktor ist), um mit dem abstrakten Funktor 1.13.2 kompatibel zu sein. (vgl. auch das Diagramm weiter unten).

Abbildungen sind diejenigen $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, die mit den Abbildungen i, ϕ und γ verträglich sind.

(2.4.9) Lemma. *T_F läßt sich als Gruppenschema über $\mathbb{Z}$ auffassen mit den Eigenschaften:*

[4] falls $(N, \mathrm{ind}(T_F, V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}})) = 1$, ansonsten wie in 2.3.1

i. Die Reduktionsabbildung
$$T_F(\mathbb{Z}_p) \to T_F(\mathbb{F}_p)$$
ist surjektiv.

ii. Für alle p, so dass (p) und $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind, gilt:
$$T_F(\mathbb{F}_p) = \{x \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{F}_p)^* \mid \langle xv, xw \rangle = \rho_x \langle v, w \rangle \text{ für alle } v, w \in \mathfrak{g}_\mathfrak{i} \otimes \mathbb{F}_p\}$$
wobei $\rho_x \in \mathbb{F}_p^*$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Reduktion der Form $\mathrm{tr}(\beta_i \cdot \bar{\cdot})$ ist.

Die reduzierte Form ist im verzweigten Fall nicht wieder von der Form $\mathrm{tr}(\beta_i \cdot \bar{\cdot})$. Man kann hier $\mathrm{ind}(T_F, V_\mathbb{Z}) = 1$ annehmen, falls $V_\mathbb{Z}$ zur Hauptordnung gehört.

(2.4.10) Betrachte ebenfalls Kategorie $F^{(\iota)}av_{2g,B,K}$ mit den Objekten $(\mathcal{X}, \phi, i, \xi)$ aus einer abelschen Varietät über B, einer Polarisation $\phi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(\mathcal{X}, {}^t\mathcal{X})$, einer Abbildung $i : F \to \mathrm{End}_\mathbb{Q}(\mathcal{X})$, und einer F-linearen K-Level-Struktur (symplektische Ähnlichkeit) mit der Eigenschaft
$$\exists \text{ lokale symplektische Ähnlichkeiten } \alpha_i : (V_\mathbb{Q})_{U_i} \to \mathcal{L}_\mathbb{Q}|_{U_i}$$
mit $\alpha^* i = \iota$. Abbildungen sind diejenigen $\beta \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, die mit den Abbildungen i, ϕ und ξ verträglich sind.

Es gibt dann wiederum Äquivalenzen zwischen den so konstruierten Kategorien (im Fall $K = K(N)$), die sich in ein Diagramm wie folgt einfügen:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_{\pm h} \mathcal{H}(T_F, V_\mathbb{Q}, \{h\}, K(N))_B \arrow[rrr, "\sim"] \arrow[ddd, "\iota^*"'] & & & F^{(\iota)}pav_{2g,B,K(N)} \arrow[ddd] \\
& \bigcup_{\pm h, [c] \in \mathrm{cl}(T_F, V_\mathbb{Z}^\mathbf{d})} \mathcal{H}(T_F, {}^cV_\mathbb{Z}^\mathbf{d}, \{h\}, N)_B \arrow[ul, "\cup c", "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\cup \iota_c^*"'] & \bigcup_{[c] \in \mathrm{cl}(T_F, V_\mathbb{Z}^\mathbf{d})} \mathcal{O}_c^{(\iota)} pav_{2g,\mathbf{d},B,N} \arrow[ur, "\sim", "\cup c"'] \arrow[d, "\cup c"] & \\
& \mathcal{H}(GSp, V_\mathbb{Z}^\mathbf{d}, X_{pol}^{-1}, N)_B \arrow[r, "\sim"] \arrow[dl, "\sim"'] & pav_{2g,\mathbf{d},B,N} \arrow[dr, "\sim"] & \\
\mathcal{H}(GSp, V_\mathbb{Q}, X_{pol}^{-1}, K(N))_B \arrow[rrr, "\sim"] & & & \mathbb{Q}pav_{2g,B,K(N)}
\end{tikzcd}$$

(2.4.11) Um einen Überblick über alle Isomorphieklassen abelscher Varietäten mit Polarisation und komplexer Multiplikation zu erhalten (also nicht nur bis auf Isogenie), setzen wir $N = 1$ und fragen nach den *verschiedenen* Bildern der Funktoren ι^*, (wobei wir die Abbildung $i : F \to \mathrm{End}_\mathbb{Q}(A)$ ggfl. nicht vergessen, siehe unten)

$$\bigcup_{\pm h} \mathcal{H}(T_F, V_{\mathbb{Q}}, h, K(1))_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\iota^*} \mathcal{H}(GSp, V_{\mathbb{Q}}, X_{pol}^{-1}, K(1))_{\mathbb{C}}$$

bzw. der Abbildungen

$$T_F(\mathbb{Q})\backslash(\{\pm h\} \times T(\mathbb{A}_f)/K(1)) \xrightarrow{\iota^*} GSp(\mathbb{Q})\backslash(X \times (GSp(\mathbb{A}_f)/K(1)))$$

für alle möglichen Einbettungen $\iota : T_F \hookrightarrow GSp$. Die Bilder zweier solcher Abbildungen ι^* und ι'^* sind auf jeden Fall verschieden, wenn ι und ι' nicht in GSp konjugiert sind. Es gibt

$$H^1(\mathbb{Q}, T_F) \cong (F^+)^*/N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*$$

verschiedene solche Konjugationsklassen. Wir können diese kanonisch (d. h. ohne eine Einbettung zu wählen) mit

$$(F^-)^*/N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*$$

identifizieren (siehe Satz 2.4.7).

(2.4.12) Innerhalb einer solchen Konjugationsklasse lassen sich die Isomorphieklassen wie folgt beschreiben. Wähle ein ι aus der Konjugationsklasse und ein $v \in V_{\mathbb{Q}}$. Es ist dann $V_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{a}v$, $V_{\mathbb{Z}}^* = \mathfrak{b}v$ bzgl. der durch die Polarisation definierten Einbettung $V_{\mathbb{Z}}^* \subset V_{\mathbb{Q}}$. für ein gebrochenes Ideal in $\mathcal{O}$ und es gilt

$$\mathfrak{f} = (\beta\mathfrak{d})\ \ \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}.$$

Dabei ist $\mathfrak{d}$ die Differente von $F|\mathbb{Q}$ (siehe [16, Kapitel III, §2]) und $\mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ ein von allen Wahlen unabhängiges gebrochenes invertierbares Ideal der Form $\mathfrak{f}_0\mathcal{O}$, für ein gebrochenes invertierbares Ideal $\mathfrak{f}_0$ von $(\mathcal{O} \cap F^+)$ und β beschreibt die symplektische Form wie in Satz (2.4.7) und damit die Konjugationsklasse. Die Polarisation ist prinzipal (i. e. $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$), genau dann, wenn $\mathfrak{f} = \mathcal{O}$ ist.

Beweis. siehe [21, Chapter IV, §14]. □

Nach Lemma (1.13.1) liegt jede Isomorphieklasse (zu einem einfachen CM-Typ; $\mathrm{Stab}(\iota \circ h, GSp(\mathbb{Q})) = \iota(T_F(\mathbb{Q}))$ [5]) im Bild eines ι^{g_i}, wobei die $g_i\mathfrak{a}$ genau ein Vertretersystem vom T_F-Geschlechtern innerhalb der GSp-Klasse bilden. Für jedes dieser Geschlechter gibt es dann die zwei Bildpunkte $\iota \circ \pm h$.
Es gibt dann 3 Fälle:

i. $g_i\mathfrak{a}$ gehört zu einer anderen Ordnung.

ii. $\mathfrak{a}' := g_i\mathfrak{a}$ ist ein gebrochenes invertierbares Ideal derselben Ordnung $\mathcal{O}$, aber

$$\rho\mathfrak{f} \neq (\beta\mathfrak{d})\ \ \mathfrak{a}'\overline{\mathfrak{a}'},$$

für alle $\rho \in \mathbb{Q}$. (Dies kann im Fall $\mathfrak{f} = \mathcal{O}$ nicht passieren.)

[5] Wenn man die Abbildung $i : F \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ mit berücksichtigt, gilt dies auch für die anderen Fälle.

iii. $\mathfrak{a}' := g_i\mathfrak{a}$ ist ein gebrochenes invertierbares Ideal derselben Ordnung $\mathcal{O}$ und

$$\rho\mathfrak{f} = (\beta\mathfrak{d}) \;\; \mathfrak{a}'\overline{\mathfrak{a}'},$$

für ein $\rho \in \mathbb{Q}$.

Wir beschränken uns hier darauf, die Isomorphieklassen des Typs (iii) für den Fall, dass $\mathcal{O}$ die Hauptordnung ist, zu behandeln. Dazu muß die Menge

$$I^0_{\mathcal{O}_F} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = (\rho), \;\; \rho \in \mathbb{Q}^*\}$$

in T_F-Geschlechter eingeteilt werden. Betrachte dazu das Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & T_F(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathbb{Z}}^* \times F^x(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & (F^+)^x(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T_F(\mathbb{A}_f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_f^* \times \mathbb{A}_{F,f}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_{F^+,f}^* \arrow[r] \arrow[d] & \prod_\wp H^1(\mathbb{Q}_\wp, T_F) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & I^0_{\mathcal{O}_F} \arrow[r] & I_\mathbb{Q} \times I_{\mathcal{O}_F} \arrow[r] \arrow[d] & I_{\mathcal{O}_{F^+}} \arrow[d] & & \\
 & & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Daraus resultiert nach dem Schlangenlemma eine exakte Sequenz

$$T_F(\widehat{\mathbb{Z}}) \to T_F(\mathbb{A}_f) \to I^0_{\mathcal{O}_F} \to Z \to \prod_p H^1(\mathbb{Q}_p, T_F)$$

mit

$$Z \cong (F^+)(\widehat{\mathbb{Z}})/N_{F/F^+}F^x(\widehat{\mathbb{Z}}) \cdot \widehat{\mathbb{Z}}^*$$

und

$$I^0_{\mathcal{O}_F} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = (\rho)\}\,.$$

Es kommt also darauf an, den Kern Z^0 der Abbildung

$$Z \to \prod_p H^1(\mathbb{Q}_p, T_F)$$

zu bestimmen. Es ist $Z = \prod_\wp Z_\wp$ (Produkt über die Primstellen von F) mit

$$Z_\wp = \widehat{\mathcal{O}}^*_{F^+_\wp}/N_{F/F^+}\widehat{\mathcal{O}}^*_{F_\wp} \cdot \mathbb{Z}_p;$$

vgl.:

$$H^1(\mathbb{Q}_p, T_F) = \prod_{\wp|p} F_\wp^+/N_{F/F^+}F_\wp \cdot \mathbb{Q}_p.$$

Daraus folgt sofort, dass die Abildung im in $F_\wp^+/F_\wp$ unverzweigten Fall injektiv ist, denn $Z_\wp$ ist dann 0. Im anderen Fall ist der Kern der Abbildung

$$\widehat{\mathcal{O}}_{F_\wp^+}/N_{F/F^+}\widehat{\mathcal{O}}_{F_\wp} \cdot \mathbb{Z}_p \to F_\wp^+/N_{F/F^+}F_\wp \cdot \mathbb{Q}_p$$

genau dann nichttrivial (und folglich $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), wenn $p \notin N_{F/F^+}F_\wp$.

(2.4.13) Auf der anderen Seite lassen sich die Isomorphieklassen wie folgt charakterisieren (vgl. [21, Chapter IV, §14]): Durch eine Isomorphieklasse ist $L_\mathbb{Z} = H_1(A,\mathbb{Z})$ als $\mathcal{O}_F$-Modul bestimmt; z. B. $L_\mathbb{Z} \cong \mathfrak{a}$, wie oben. Die Polarisation ergibt eine Form

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} & \to & \mathbb{Z} \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{tr}(\beta x \overline{y}) \end{array}$$

mit $\mathfrak{f} = \beta\mathfrak{D}\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}$. Es gibt zu diesen Daten $(\mathfrak{a},\beta)$ dann genau 2 Isomorphieklassen abelscher Varietäten und zwei Daten $(\mathfrak{a},\beta)$ und $(\mathfrak{a}',\beta')$ gehören zu denselben Isomorphieklassen, genau dann, wenn

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'^{-1}} & = & (\gamma) \qquad \gamma \in F^+ \qquad \text{und} \\ \beta & \equiv & \beta'\gamma \mod N_{F/F^+}\mathcal{O}_F^* \cdot \mathbb{Z}^*. \end{array}$$

Daraus folgt, dass die Isomorphieklassen sich durch die Gruppe

$$\mathrm{Pic}^0(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_F^*/N_{F/F^+}\mathcal{O}_F^* \cdot \mathbb{Z}^*$$

parametrisieren lassen. Dabei ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pic}^0(\mathcal{O}_F) & = & \left\{ [\mathfrak{a}] \mid \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = (\gamma) \;\; \gamma \in F^+ \right\} \\ & = & \ker\left(\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{N_{F/F^+}} \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{F^+}) \right). \end{array}$$

Eine Identifikation der beiden Beschreibungen ergibt sich nocheinmal durch die Sequenzen

$$1 \to \mu_F \longrightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathcal{O}_F^* \longrightarrow (\mathcal{O}_{F^+}^*)^{res} \longrightarrow \mathrm{cl}(T_F) \longrightarrow \mathrm{Pic}^1(\mathcal{O}_F) \to 1$$

und

$$1 \to (\mathcal{O}_{F^+}^*)^{res} \longrightarrow \mathcal{O}_{F^+}^* \xrightarrow{\delta} \ker \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathcal{O}_F)/\,\mathrm{Pic}^1(\mathcal{O}_F) \to 1$$

Dabei sind:

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{O}_{F^+}^*)^{res} & = & \mathcal{O}_{F^+}^* \cap (\mathbb{Q}^* \cdot N_{F/F^+}F^*) \cap (\widehat{\mathbb{Z}}^* \cdot N_{F/F^+}F^x(\widehat{\mathbb{Z}})) \\ \ker & = & \dfrac{(F^+)^* Z \cap N_{F/F^+}\mathbb{A}_{F,f} \cdot \mathbb{A}_f^*}{N_{F/F^+}F^* \cdot \mathbb{Q}^*} \end{array}$$

und die Gruppe $\mathrm{cl}(T_F)$ ist die Klassengruppe von T_F bzgl. $\mathcal{O}_F$ (siehe 1.10).
Hierbei wählt das Element aus ker die Einbettung ι (Bestimmung eines Elementen von $H^1(\mathbb{Q}, T_F) \times Z$; andere Einbettungen sind nicht mit der Wahl $\mathcal{O}_F$ und $\mathfrak{f}$ verträglich) und das Element in $\mathrm{cl}(T_F)$ die Ismorphieklasse in $\mathcal{H}(T_F, V_{\mathbb{Q}}, h, 1)_{\mathbb{C}}$. Deren Produkt läßt sich *als Menge*, wie man an den beiden Sequenzen oben ablesen kann mit der Gruppe

$$\mathrm{Pic}^0(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_F^*/N_{F/F^+}\mathcal{O}_F^* \cdot \mathbb{Z}^*,$$

die in der zweiten (elementaren) Beschreibung auftaucht, identifizieren.

Beweis der Exaktheit der beiden Sequenzen. Durch Diagrammjagd des aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow T_F \xrightarrow{\lambda \times incl.} \mathbb{G}_m \times R_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \xrightarrow{incl./N_{F/F^+}} R_{F^+/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

resultiertenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu_F = T_F(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \{\pm 1\} \times \mathcal{O}_F^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{F^+}^* \arrow[r] \arrow[d] & \ker \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & T_F(\mathbb{Q}) \times T_F(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}^* \times \widehat{\mathbb{Z}}^* \times F^* \times F^x(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & (F^+)^* \times (F^+)^x(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathbb{Q}, T_F) \times Z \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T_F(\mathbb{A}_f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_f^* \times \mathbb{A}_{F,f}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_{F^+,f}^* \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{\wp} H^1(\mathbb{Q}_{\wp}, T_F) \arrow[r] & 1 \\
 & \mathrm{cl}(T_F) \arrow[r] \arrow[d] & \{1\} \times \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{F^+}) \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

in dem die mittleren beiden Zeilen und alle Spalten exakt sind. $\square$

Kapitel 3

Algebraische Theorie

3.1 Abelsche Schemata

Dieser Abschnitt enthält einige Definitionen und Resultate der algebraischen Theorie der abelschen Varietäten bzw. Schemata, die im folgenden benötigt werden. Die Beweise findet man z. B. in [14], [10] oder [15].
Sei S ein beliebiges lokal noethersches Basisschema.

(3.1.1) Definition. Ein abelsches Schema $\pi : A \to S$ der relativen Dimension g über S ist ein Gruppenschema über S mit den folgenden Eigenschaften:

i. π ist eigentlich und glatt,

ii. Für alle geometrischen Punkte $p : \operatorname{spec}(k) \to S$ (i. e. k alg. abgeschlossen), ist die Faser $A \times_{S,p} \operatorname{spec}(k)$ zusammenhängend und hat die Dimension g,

siehe [15].
Abelsche Schemata über S der relativen Dimension g sind automatisch kommutativ und bilden eine Kategorie, die hier mit $av_{g,S}$ bezeichnet sei.
Es gibt den Picard-Gruppenfunktor

$$\operatorname{Pic}(A|S) : T \mapsto \frac{\{\text{Gruppe der invertierbaren Garben } \mathcal{L} \text{ auf } A \times_S T\}}{\{\text{Garben der Form } \pi^*(\mathcal{K}), \text{ für } \mathcal{K} \text{ auf } S\ \}}.$$

Er hat einen Unterfunktor $\operatorname{Pic}^0(A/S)$, dergestalt, dass für geometrische Punkte $p : \operatorname{spec}(k) \to S$,

$$\operatorname{Pic}^0(A/S)(p) = \left\{\mathcal{L} \mid \mathcal{L}^{\otimes N} \text{algebraisch äquivalent zu } 0\right\}.$$

Für ein abelsches Schema über S wie oben definiert sind diese beiden Funktoren darstellbar. Das darstellende Schema $\operatorname{Pic}^0(A/S)$ ist wieder eine abelsches Schema über S und wird auch als das Dual ${}^tA$ bezeichnet. (Für den Vergleich mit dem analytisch definierten ${}^tA$ siehe nächster Abschnitt.)

Sei $\mu : A \times_S A \to A$ die Multiplikationsabbildung. Für jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf A definiert

$$\mu^*(\mathcal{L}) \otimes p_1^*(\mathcal{L})^{-1} \otimes p_2^*(\mathcal{L})^{-1}$$

eine invertierbare Garbe auf $A \times_S A$. Dies gibt mittels 1. Projektion $p_1 : A \times_S A \to A$ einen A-wertigen Punkt

$$\Lambda(\mathcal{L}) : A \to {}^tA = \mathrm{Pic}(A|S).$$

Für alle geometrischen Punkte $p : k \to S$ läßt sich diese Abbildung schreiben als

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(\mathcal{L}) : A_p(k) & \to & {}^tA_p(k) \\ a & \mapsto & T_a^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{array}$$

für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf A_p und die Translation mit a (vgl. die analytische Abbildung 2δ in 2.2).

(3.1.2) Definition. Ein S-Morphismus

$$\phi : A \to {}^tA$$

heißt eine Polarisation von A, falls für alle geometrischen Punkte $p : \mathrm{spec}(k) \to S$

$$\phi_p : A_p \to {}^tA_p$$

von der Form $\Lambda(\mathcal{L})$ für eine *ample* invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf A_p ist.

Sei $NS(A)$ definiert als der Quotient

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(A|S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A|S) \longrightarrow NS(A) \longrightarrow 0\ .$$

Es gibt dann eine Injektion der Teilmenge in $\mathrm{Hom}_S(A, {}^tA)$ der Polarisationen in $NS(A)$.

Einem Morphismus

$$\phi : A \to {}^tA$$

kann man umgekehrt, wie folgt, eine invertierbare Garbe auf A zuordnen. Sei $\mathcal{L}$ die Poincarégarbe auf $A \times_S {}^tA$, die so normiert werden kann, dass der Pullback bezüglich

$${}^tA \cong S \times_S {}^tA \xrightarrow{e,\mathrm{id}_{{}^tA}} A \times_S {}^tA$$

trivial ist. Setzte dann

$$L(\phi) = (\mathrm{id}_A, \phi)^*(\mathcal{L}).$$

Falls λ eine Polarisation ist, gilt dann sogar:

$$\Lambda(L(\phi)) = 2\phi.$$

Es gilt in Analogie zum analytischen Satz 2.2.1:

(3.1.3) Satz. Für jeden geometrischen Punkt p von S und jede Polarisation $\phi_p = \Lambda(\mathcal{L})$ von A_p gilt:

i. $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ definiert eine projektive Einbettung von A_p.

ii. $\dim H^0(A_p, \mathcal{L}) = \sqrt{\# \ker \phi_p}$

Wiederum gilt
$$\ker(\phi_p) = (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z})^2 \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^2 \qquad d_1|\cdots|d_g.$$
Wir nennen ϕ vom Typ $\mathbf{d} = \{d_1, \ldots, d_g\}$, falls dies für alle geometrischen Punkte p der Fall ist.
Der Kern der Multiplikationsabbildung
$$0 \to A[N] \longrightarrow A \xrightarrow{[N]} A \to 0$$
ist ein endliches Gruppenschema über S. Obige Sequenz induziert eine duale exakte Sequenz
$$0 \to \mathrm{Hom}_S(A[N], \mathbb{G}_m) \longrightarrow {}^tA \xrightarrow{[N]} {}^tA \to 0\ ,$$
siehe [10, §11]. Dies ergibt eine nicht ausgeartete Paarung
$$\epsilon : A[N] \times {}^tA[N] \to (\zeta_N)_S.$$
Durch eine Polarisation erhält man eine *alternierende* Paarung
$$\epsilon^\phi(\alpha, \beta) := \epsilon(\alpha, \phi(\beta)),$$
die sogenannte Weil-Paarung, siehe [10, §16].

(3.1.4) Der Tate-Modul $T(A)$ von A wird definiert als der projektive Limes bzgl. der Abbildungen
$$A[NM] \xrightarrow{[N]} A[M]$$
und wir schreiben
$$T(A) = \varprojlim\ A[M],$$
bzw.
$$T_l(A) = \varprojlim\ A[l^n].$$
Es ist dann
$$T(A) = \bigoplus_l T_l(A).$$
Obige Betrachtungen zeigen, dass jede Polarisation ϕ eine Weil-Paarung
$$\epsilon^\phi : T(A) \times T(A) \to \mathbb{Z}(1)$$
induziert.
Sei $S = \mathrm{spec}(k)$ nun das Spektrum eines Körpers und l eine Primzahl ($l \neq \mathrm{char}(k)$).

(3.1.5) Satz. Die Bildung der Weil-Paarung induziert einen injektiven Homomorphismus:

$$NS(A) \otimes \mathbb{Z}_l \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(A), \mathbb{Z}_l(1)).$$

Für jede Isogenie $\alpha : A \to B$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} NS(A) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\alpha"] & \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(A), \mathbb{Z}_l(1)) \arrow[d, hook, "\alpha"] \\ NS(B) \otimes \mathbb{Z}_l \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(B), \mathbb{Z}_l(1)) \end{tikzcd}$$

kartesisch. Insbesondere ist ϕ durch l^n teilbar, falls ϵ^ϕ auf $T^l(A)$ durch l^n teilbar ist, bzw. allgemein ist ϕ durch r teilbar, falls ϵ^ϕ auf $T(A)$ durch r teilbar ist ($\mathrm{char}(k) = 0$). Die Form ϵ^ϕ ist auf $T(A)$ vom Typ $\mathbf{d}$ genau dann, wenn ϕ vom Typ $\mathbf{d}$ ist ($\mathrm{char}(k) = 0$).

siehe [10, §16] und auch 3.2 für den Vergleich mit der analytischen Theorie.
Falls k algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik 0 ist, gilt ferner

(3.1.6) Satz.

$$T(A) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{2g}$$

und

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(T(A), T(B))$$

ist injektiv.

Sei wiederum k algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik 0.

(3.1.7) Lemma. Eine Isogenie

$$0 \to K \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$$

induziert eine Sequenz

$$0 \to T(A) \xrightarrow{\alpha} T(B) \longrightarrow K \to 0$$

Beweis. $\mathrm{coker}(\alpha')$ ist auf jeden Fall endlich und K ebenfalls. Für ein N mit $\#\,\mathrm{coker}(\alpha') \# K | N$

betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & T(A_p) \arrow[r, "{[N]}"] \arrow[d] & T(A_p) \arrow[r] \arrow[d] & A[N] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(B_p) \arrow[r, "{[N]}"] \arrow[d] & T(B_p) \arrow[r] \arrow[d] & B[N] \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r, "0"] & \mathrm{coker}(\alpha) & &
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt $K \cong \mathrm{coker}(\alpha)$. □

Sei nun S wieder beliebig und $V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ ein Gitter vom Typ $\mathbf{d}$ in $V_{\mathbb{Q}}$ mit $(N, d_g) = 1$. Eine Level-N-Struktur auf A ist eine symplektische Ähnlichkeit:

$$\gamma : (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_S \to A[N],$$

d. h.

$$\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_S \arrow[d, "\gamma"] & \times & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_S \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \arrow[d, "\zeta"] \\
A[N] & \times & A[N] \arrow[r, "\epsilon^{\phi}"] & (\mu_n)_S
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ bis auf einen Skalar[1]. (Die rechte Abbildung ist von der Wahl einer Einheitswurzel abhängig, also nicht kanonisch definiert. Diese Identifikation spielt jedoch keine Rolle, da wir die Kommutativität nur bis auf Skalare fordern).

(3.1.8) Betrachte die Kategorie $pav_{g,\mathbf{d},S,N}$ der Tripel (A, ϕ, γ) aus einem abelschen Schema über S, einer Polarisation ϕ vom Typ $\mathbf{d}$ und einer Level-N-Struktur wie oben. Morphismen sind Isomorphismen $\alpha : A \to B$, die die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A[N] \arrow[dd, "\alpha"] \\
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_S \arrow[ur, "\gamma_A"] \arrow[dr, "\gamma_B"'] & \\
 & B[N]
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\alpha"'] & {}^tA \\
B \arrow[r, "\phi_B"'] & {}^tB \arrow[u, "{}^t\alpha"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ machen.

[1]Im Fall $(N, \prod d_i) \neq 1$ wird wiederum stattdessen gefordert, dass γ für alle geometrischen Punkte von einer symplektischen Ähnlichkeit $\xi : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \to T(A)(p)$ induziert wird.

(3.1.9) Betrachte ebenso die Kategorie $\mathbb{Q}pav_{g,\mathbf{d},S,K}$ der Tripel $(A, \phi, \xi K)$, wobei wir uns hier auf $S = \mathrm{spec}(F)$, F Körper der Charakteristik 0 beschränken. Zunächst bilde hier

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Hier werden Isogenien ebenfalls zu Isomophismen, da mit jeder Isogenie $\alpha : A \to B$ eine *über F definierte* Isogenie $\alpha' : A \to B$ mit $\alpha\alpha' = [\deg(\alpha)]$ exisitiert. Die Polarisationen ϕ ist hier ein Element in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, {}^tA)$, mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{Q}\phi$ eine Polarisation enthält. K-Level-Strukturen ξK sind Klassen mod K von Isomorphismen

$$\xi K : V_{\mathbb{A}_f} \to T(A)(\overline{F}) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$$

mit der Eigenschaft ${}^\sigma\xi \in \xi K$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$. (Der Funktor $A \mapsto T(A)(\overline{F}) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$ setzt sich in natürlicher Weise auf $\mathbb{Q}pav_{2g,S}$ fort)

(3.1.10) Es gibt wie im analytischen Fall einen offensichtlichen Funktor ($S = \mathrm{spec}(F)$, F Zahlkörper):

$$pav_{2g,\mathbf{d},S,N} \longrightarrow \mathbb{Q}pav_{2g,K(N),S}$$

wobei $K(N) = \left\{ A \in G(\mathbb{A}_f) \mid AV^{\mathbf{d}}_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V^{\mathbf{d}}_{\widehat{\mathbb{Z}}} \right\}$. Eine Level-$N$-Struktur γ wird abgebildet auf die Klasse mod $K(N)$ des Lifts $\xi \in \mathrm{Iso}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(V^{\mathbf{d}}_{\widehat{\mathbb{Z}}}, TA)$. Dies ist möglich, da $(N, \prod d_i) = 1$ bzw. nach Definition im anderen Fall. Die Definiertheit von γ über F garantiert ${}^\sigma\xi \in \xi K(N)$.

(3.1.11) Satz. Dieser Funktor ist eine Äquivalenz (vgl. auch die analytische Konstruktion (1.10)).

Beweis. Zeige nur die essentielle Surjektivität - es ist vom Prinzip her dieselbe Konstruktion, wie die in (1.10). Sei $(A, \phi, \xi) \in \mathbb{Q}pav_{2g,K(N),S}$ gegeben, mit

$$\xi : V_{\mathbb{A}_f} \to T(A)(\overline{F}) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{A}_f$$

(A, ϕ, ξ) ist isomorph (mittels einer Isogenie $\in \mathbb{Q} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$) zu einem Tripel, für das ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "\xi^{-1}"] \arrow[d, equal] & V^{\mathbf{d}}_{\widehat{\mathbb{Z}}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "{[M]\xi}"] & K \arrow[r] \arrow[d, hook, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "{[M]}"] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r] & A[M](\overline{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

für ein M existiert, und damit eine injektive Abbildung $K \hookrightarrow A[M](\overline{F})$. Darüberhinaus ist ${}^\sigma K = K$, da ${}^\sigma\xi \in \xi K(N)$. Es existiert also eine Sequenz über F:

$$0 \to K \longrightarrow A \xrightarrow{p} A' \to 0$$

□

wobei K jetzt als Gruppenschema aufgefasst sei. Man hat dann ein Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "p"] \arrow[d, equal] & T(A')(\overline{F}) \arrow[r] & K(\overline{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "\xi^{-1}"] & V_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}} \arrow[r] \arrow[u, "\sim"', "p\xi=\xi'"] & K(\overline{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen bleibt, dass $\mathbb{Q}({}^t p)^{-1}\phi p^{-1}$ eine Polarisation ϕ' vom Typ $\mathbf{d}$ enthält. Dies folgt aus Satz 3.1.5. Das Tripel (A, ϕ, ξ) ist also isomorph zu einem Tripel (A', ϕ', ξ'), welches im Bild des obigen Funktors liegt.

Die Kategorien $pav_{g,S,\mathbf{d},N}$ bilden eine Faser-Kategorie mit dem offensichtlichen Basiswechsel (siehe nächster Abschnitt für den Spezialfall der Galoisoperation). Nach Mumford gilt der folgende Satz

(3.1.12) Satz. Sei $N \gg 1$. Dann ist der Funktor

$$S \mapsto \{\text{Isomorphieklassen in } pav_{g,S,\mathbf{d},N}\}$$

darstellbar durch ein quasi-projektives Schema $M_{g,\mathbf{d},N}$ über $\mathbb{Z}[1/N]$.

Ansonsten gibt es immer noch einen groben Modulraum für diesen Funktor (siehe [14]). (In [14] werden allgemeinere Level-N-Strukturen untersucht. Für obigen Fall siehe z. B. [1])

Die Galoisoperation

Die Galoisgruppe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ operiert auf den $\overline{\mathbb{Q}}$-wertigen Punkten des Schema $M = M_{g,\mathbf{d},N}$. Abstrakt formuliert ordnet ein $\sigma \in \Gamma$ dabei einem Punkt

$$p : \mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}}) \to M$$

den Punkt ${}^\sigma p := p \circ \mathrm{spec}(\sigma)$ zu, wobei $\mathrm{spec}(\sigma)$ der durch den Automorphismus $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}$ induzierte Schemamorphismus ist. Dies definiert wieder eine Linksoperation von Γ auf $M(\overline{\mathbb{Q}})$. (Die Abbildung spec ist ein Antihomomorphismus von Γ nach $\mathrm{Aut}(\mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}}))$)
Sei mittels der Darstellbarkeit p der Isomorphieklasse $[A, \phi, \gamma]$ zugeordnet. Dann wird dem Morphismus $p \circ \mathrm{spec}(\sigma)$ die Isomorphieklasse $[{}^\sigma A, {}^\sigma\phi, {}^\sigma\gamma]$ des durch Basiswechsel mit $\mathrm{spec}(\sigma)$ entstehenden Tripel zugeordnet. Dieses wird also beschrieben durch die Pullbacks

$$\begin{tikzcd}
{}^\sigma A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "{}^\sigma\pi"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\mathrm{spec}(\sigma)"'] & \mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^\sigma A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "{}^\sigma\phi"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\
{}^\sigma({}^t A) \arrow[r, "{}^t\sigma_A"] & {}^t A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}})} \arrow[r, "\mathrm{spec}(\sigma)"] \arrow[d, "{}^\sigma\xi"] & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}})} \arrow[d, "\xi"] \\
{}^\sigma A \arrow[r, "\sigma_A"] & A
\end{tikzcd}$$

Falls A z. B. über $\mathbb{Q}$ definiert ist, d. h. $A = \mathrm{spec}(\overline{\mathbb{Q}}) \times_{\mathrm{spec}(\mathbb{Q})} A_{\mathbb{Q}}$, so hat man ${}^\sigma\pi = \pi$, ${}^\sigma A = A$ und $\sigma_A = (\sigma, \mathrm{id})$.

Insbesondere ist ${}^\sigma p = p$ für alle σ in einer abgeschlossenen Untergruppe $\Gamma' = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F)$, falls $[{}^\sigma A, {}^\sigma\phi, {}^\sigma\gamma] = [A, \phi, \gamma]$ für alle $\sigma \in \Gamma'$. In diesem Fall faktorisiert p über $\mathrm{spec}(F)$ und daher existiert (für $N \gg 1$) ein zugehöriges Tripel (A', λ', ξ') über $\mathrm{spec}(F)$ mit $[A'_{\overline{\mathbb{Q}}}, \phi'_{\overline{\mathbb{Q}}}, \gamma'_{\overline{\mathbb{Q}}}] = [A, \phi, \gamma]$.

Die Frage ob dann auch A über F definiert ist, ist schwieriger zu beantworten und die Aussage im allgemeinen falsch. Dazu müsste das Schema $M_{g,\mathbf{d},1}$ einen entsprechenden Modulfunktor für $N = 1$ darstellen, ist aber nur noch ein grobes Modulschema.

Lie

(3.1.13) Es gibt den Funktor

$$\mathrm{Lie} : av_S \to \mathcal{O}_S\text{-}mod$$

der relativen invarianten Vektorfelder.
Er ist additiv, d. h.

$$\mathrm{Lie}(A \times_S B/S) = \mathrm{Lie}(A/S) \oplus \mathrm{Lie}(B/S),$$

und für einen Basiswechsel $T \to S$ gilt:

$$\mathrm{Lie}(A \times_S T/T) = \mathrm{Lie}(A/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T.$$

3.2 Vergleich mit analytischer Theorie

Wir können jeder Varietät S über $\mathbb{C}$ ihren analytischen Raum S^{an} zuordnen. Dies ergibt einen Funktor

$$cvar_S \to as_{S^{an}}$$

von der Kategorie der kompletten Varietäten über S in die Kategorie der Familien komplexer Mannigfaltigkeiten, wie in 2.1.1 definiert.

(3.2.1) Satz. Dies induziert einen Funktor

$$pav_{g,S,\mathbf{d},N} \to pav_{g,S^{an},\mathbf{d},N}$$

welcher für $S = \mathrm{spec}(\mathbb{C})$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Beweis. Ein Tripel (A, ϕ, γ) über $B = \{\cdot\}$ ist algebraisch, denn ϕ ist von der Form $2\delta(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ definiert eine projektive Einbettung von A und alle analytischen Unterräume eines projektiven Raumes sind algebraisch. Das resultierende algebraische A ist eigentlich über $\mathrm{spec}(\mathbb{C})$, genau dann, wenn A^{an} kompakt (d. h. eigentlich im klassischen Sinne über $\{\cdot\}$) ist. ϕ ist ebenfalls algebraisch, da jeder Morphismus in $\mathrm{Hom}(A^{an}, {}^tA^{an})$ algebraisch ist. (Das analytisch bzw. algebraisch definierte Dual sind als analytische Räume kanonisch isomorph. Es gilt sogar $\mathrm{Pic}(A/\mathbb{C}) \cong H^1(A^{an}, \mathcal{O}^*_{A^{an}})$, da in diesem Fall jede analytische invertierbare Garbe algebraisch ist.)

Die Abbildung

$$2\delta : \mathrm{Pic}(A/\mathbb{C}) \cong H^1(A^{an}, \mathcal{O}^*_{A^{an}}) \to \mathrm{Hom}(A^{an}, {}^tA^{an}) \cong \mathrm{Hom}(A, {}^tA)$$

ist gerade die Abbildung Λ, somit ist jede analytische Polarisation ϕ vom Typ $\mathbf{d}$ eine Polarisation im algebraischen Sinne vom Typ $\mathbf{d}$ und vice versa. Natürlich ist $A[N] \cong A^{an}[N]$, daher liefert die analytische Level-N-Struktur eine algebraische Level-N-Struktur und umgekehrt. Zur Äquivalenz beachte man noch, dass ebenfalls $\mathrm{Hom}(A^{an}, B^{an}) = \mathrm{Hom}(A, B)$ ist, für beliebige abelsche Varietäten A und B.
Die benutzten Resultate zum Vergleich von analytischen und algebraischen Objekten findet man bei Serre, GAGA [19]. □

(3.2.2) Satz. Sei $N \gg 1$. Der obige Funktor induziert einen analytischen Isomorphismus

$$M_{g,\mathbf{d},N}(\mathbb{C}) \to Sh_N(GSp_{2g}, V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}, X) \cong Sh_{K(N)}(GSp_{2g}, X)$$

wobei $V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ ein Gitter vom Typ $\mathbf{d}$ bzgl. der symplektischen Standardform ist und $K(N)$ die in 1.10 definierte Gruppe.

Beweis. Aus der Darstellbarkeit erhalten wir ein abelsches Schema über $M_{g,\mathbf{d},N}(\mathbb{C})$, welches zur Identität auf $M_{g,\mathbf{d},N}$ gehört. Dieses definiert mittels obigem Funktor eine analytische Familie von abelschen Varietäten über $M_{g,\mathbf{d},N}(\mathbb{C})^{an}$ und daher einen analytischen Morphismus

$$M_{g,\mathbf{d},N}(\mathbb{C})^{an} \to Sh_N(GSp_{2g}, V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}, X).$$

Dieser ist bijektiv, wegen der Äquivalenz der Kategorien für $S = \mathrm{spec}(\mathbb{C})$.

□

3.3 Kanonische Modelle

Sei nun (G, X) ein beliebiges Shimura-Datum, welches die Axiome (SV1) und (SV2) erfüllt (1.9.7) und sei E ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.

(3.3.1) Definition. Ein Modell von $Sh(G, X)$ über E ist ein Schema M, definiert über E, mit einer stetigen Rechtsoperation der Gruppe $G(\mathbb{A}_f)$ und einem mit der $G(\mathbb{A}_f)$-Operation kompatiblen Isomorphismus

$$M(\mathbb{C}) \cong Sh(G, X).$$

(3.3.2) Bemerkung. Es ist gleichbedeutend zu jeder kompakt-offenen Untergruppe $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ ein Schema M_K und Abbildungen $J_{L,K}(x) : M_K \to L_K$ für alle $K, L \subset G(\mathbb{A}_f)$ und alle $x \in G(\mathbb{A}_f)$, mit $xKx^{-1} \subseteq L$ zu geben, die die Eigenschaften

i. $J_{M,L}(y)J_{L,K}(x) = J_{M,L}(yx)$,

ii. $J_{K,K}(x) = \mathrm{id}$,

iii. für $K \trianglelefteq L$ definiert J eine Operation auf M_K und $J_{L,K}(e)$ definiert den Quotienten $M_K/(L/K) \xrightarrow{\sim} M_L$,

erfüllen (vgl. auch [2, p. 137]).
Es gilt dann

$$M = \varprojlim M_K$$

und

$$M_K = M/K.$$

(3.3.3) Durch die Isomorphismen

$$M_{g,\mathbf{d},N}(\mathbb{C})^{an} \to Sh_{K(N)}(GSp_{2g}, X) \qquad N \in \mathbb{N}, N \gg 1$$

wird $M_{g,\mathbf{d},N}$ zu einem Modell von $Sh(GSp_{2g}, X)$ über spec($\mathbb{Q}$), denn für jede kompakt offene Gruppe $K \subset GSp_{2g}(\mathbb{A}_f)$ findet man ein Gitter $V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ für geeignetes $\mathbf{d}$ (o.b.d.A. von der Form $(d_1, \ldots, d_g)$ mit $d_I \in \mathbb{Z}$), mit der Eigenschaft $KV_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}} = V_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}}$, d. h. $K \subseteq K(1)$ (siehe [17]). Dann existiert ein $K(N) \trianglelefteq K$, da $K(N) \trianglelefteq K(1)$. Die Varietät M_K kann dann als der Quotient

$$M_K := M_{g,\mathbf{d},N}/(K/K(N))$$

definiert werden.

Es gilt dann sogar:

(3.3.4) Satz. Es gibt funktorielle Isomophismen

$$\mathrm{Hom}(S = \mathrm{spec}(F), M_K) \xrightarrow{\sim} [\mathbb{Q}pav_{2g,S,K}]$$

für alle Zahlkörper F und genügend kleinen kompakt offenen K.

Beweis. Dies folgt aus der Äquivalenz $pav_{2g,\mathbf{d},S,N} \cong \mathbb{Q}pav_{2g,S,K(N)}$ und der Darstellbarkeit von $S \mapsto [pav_{2g,\mathbf{d},S,N}]$. □

(3.3.5) Man kann sich sogar auf den Fall $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ beschränken (prinzipal polarisierte abelsche Schemata), denn zu jedem K existiert ein $K(N)$ bzgl. $V_{\mathbb{Z}}^1$ mit $K(N) \subset K$. Allerdings ist $K(N)$ dann i. a. nicht mehr normal in K. Seien $K(N)^{\alpha_i}$ die (endlich vielen) Konjugierten von $K(N)$ in K und $K' = \bigcap_i K(N)^{\alpha_i}$. Man hat dann in $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ die folgenden Projektionen:

$$\begin{tikzcd}
 & M_{K(N)^{\alpha_1}} \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr] & \\
M_{K'} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddd] & M_{K(N)^{\alpha_2}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & M_K \\
 & \vdots \arrow[d, "\sim"] & \\
 & & \\
 & M_{K(N)^{\alpha_r}} \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

und weiss $M_{K(N)^{\alpha_i}} = M_{K'}/(K(N)^{\alpha_i}/K')$.
und $M_K = M_{K'}/(K/K')$.
Aus dem System der $M_{K(N)^{\alpha_i}}$ kann dann umgekehrt M_K durch das obige Diagramm rekonstruiert werden.

(3.3.6) Beispiel. Sei $V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ vom Typ $\mathbf{d}$ und $N = \max d_i = d_g$. Es existiert dann ein $V_{\mathbb{Z}}^1 \supseteq V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}$ vom Typ $(1, \ldots, 1)$ (z. B. mit Basis $\{d_i^{-1}e_i, e_{i+g}\}$). Sei $K = \left\{g \in GSp(\mathbb{A}_f) \mid gV_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}} = V_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}}\right\}$ Es gilt dann $K(N) \subset K$. Der Abbildung

$$\begin{tikzcd}
M_{K(N)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sim"] & M_K \arrow[d, "\sim"] \\
M_{g,1,N} & M_{g,\mathbf{d},1}
\end{tikzcd}$$

entspricht ein Funktor

$$pav_{g,1,S,N} \to pav_{g,\mathbf{d},S,1}$$

der sich wie folgt beschreiben lässt. Sie entspricht für $S = spec(F)$ dem zusammengesetzten Funktor

$$pav_{g,1,N} \xrightarrow[\sim]{V_{\mathbb{Z}}^1} \mathbb{Q}pav_{g,K(N),1} \longrightarrow \mathbb{Q}pav_{g,K,1} \xleftarrow[V_{\mathbb{Z}}^{\mathbf{d}}]{\sim} pav_{g,\mathbf{d},1}.$$

Man muss also die Konstruktion (3.1.10) nachahmen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "\xi^{-1}"] \arrow[d, equal] & 1/NV_{\widehat{\mathbb{Z}}}^{\mathbf{d}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "N\xi"] & K \arrow[r] \arrow[d, hook, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r, hook, "{[N]}"] & T(A)(\overline{F}) \arrow[r] & A[N](\overline{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bilde dann die Varietät A/K. Für die Polarisation siehe 3.1.10. Die einzige Information der Levelstruktur, die hier eine Rolle spielt, ist die oben konstruierte Untergruppe $K \subset A[N]$.

(3.3.7) Sei eine Zerlegung $V_{\mathbb{Q}} = V_{1\mathbb{Q}} \perp \cdots \perp V_{n\mathbb{Q}}$, wie in 2.2.7, gegeben.

Die Shimuravarietät $Sh_{(\prod K_i)^0}((\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0, X_{pol}^{-1})$ (Bezeichnungen wie in 2.2.7) ist eine Untershimuravarietät von $\prod Sh(GSp(V_{i\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1}) \cong \prod M_{g_i,K_i}$. Ihr entspricht eine über $\mathbb{Q}$-definierte Untervarietät $(\prod M_{g_i,K_i})^0$. Und die Abbildung

$$Sh_{(\prod K_i)^0}((\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0, X_{pol}^{-1}) \to Sh_K(GSp(V_{\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1}),$$

übersetzt sich in einen $\mathbb{Q}$-Morphismus (Produkte sind mit Basiswechseln verträglich):

$$(\prod M_{g_i,K_i})^0 \to M_{g,K}.$$

(3.3.8) Die Galoisoperation auf $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$, die durch das obige Modell gegeben wird, läßt sich innerhalb der analytischen Theorie beschreiben. Dies führt zum Begiff des kanonischen Modelles, welcher auch für allgemeinere Shimura-Varietäten Sinn macht. Für die obigen Shimuravaritäten, die Modulräume für abelsche Varietäten sind, ist die Aussage kanonisches Modell zu sein äquivalent zum Hauptsatz der komplexen Multiplikation.

Definition des kanonischen Modelles

Sei wiederum (G, X) ein beliebiges Datum, welches die Axiome (SV1) und (SV2) erfüllt (1.9.7) und $X \ni h : \mathbb{S}_{\mathbb{R}} \to G$ gegeben. Betrachte den Homomorphismus (vgl. auch den Beweis von Satz 1.4.4):

$$\mu_h : \mathbb{G}_m \xrightarrow{(id,1)} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \cong \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{C}} .$$

Dieser ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Gruppen, auf denen die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})$ operiert.

(3.3.9) Definition. Falls h über einen $\mathbb{Q}$-Torus $T \subset G$ faktorisiert, ist der Definitionskörper des Morphismus μ ein Zahlkörper $E(h)$ (auf jeden Fall ist μ über dem Splitkörper definiert). Er heißt der Reflexkörper und wird mit $E(T, h)$ bezeichnet.

(3.3.10) Beispiel. Falls h vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ ist und $T \cong T_F$, so gilt $L^{-1,0} = \oplus_{\Phi \ni \rho: F \to \mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\rho)}$ als F-Moduln, wobei Φ der CM-Typ von h ist (siehe 2.3.3). Es ist in diesem Fall offensichtlich $\sigma \in \mathrm{Fix}(E)$ genau dann, wenn $\sigma \circ \Phi = \Phi$.
Dies ist nicht zu verwechseln mit der Charakterisierung der komplexen Multiplikation auf dem kleinsten Faktor der zugehörigen abelschen Varietät in 2.3.4. Ist F abelsch, so stimmen diese aber trotzdem überein, d.h. es gilt $K = E$ mit der Bezeichnung von 2.3.4.

(3.3.11) Definition. Wir definieren ein *kanonisches* Modell von $Sh(T, h)$ über E wie folgt. Die Mengen $Sh_K(T, h)$ sind endlich. Es genügt daher, die Galoisoperation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|E)$ hierauf zu beschreiben, um ein algebraisches Modell zu erhalten. Betrachte hierzu den Morphismus

$$N_h : E^x = R_{E/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{R_{E/\mathbb{Q}}\mu_h} R_{E/\mathbb{Q}}(T) \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}}} T ,$$

die sogenannte Reflexnorm. Sie induziert eine Abbildung:

$$\mathrm{Gal}^{ab}(\mathbb{C}|E) \xrightarrow{\mathrm{rec}} \pi_0(E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A})) \xrightarrow{N_h} \pi_0(T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})) = T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)$$

Die rechte Gruppe operiert von rechts auf allen $Sh_K(T,h)$. Dies definiert obiges Modell von T.

Die Reziprozitätsabbildung bildet einen Frobeniusautomorphismus $\sigma_\wp$ von $K|E$ für eine Stelle $\wp$ von E auf die Klasse des Adels $(1,\cdots,1,\pi_\wp^{-1},1,\cdots)$ ab. Dabei ist $\pi_\wp \in E_\wp$ ein Primelement - beachte $E^x(\mathbb{A}_f) \cong \mathbb{A}_{E,f}^*$.
Die Inklusion des Torus definiert eine Inklusion der Shimuravarietäten

$$Sh(T,h) \hookrightarrow Sh(G,X).$$

Dies ermöglicht, die Definition eines kanonischen Modelles auf $Sh(G,X)$ auszudehnen.

(3.3.12) Definition. Ein Modell von $Sh(G,X)$ über E heißt E-kanonisch, wenn jede der Abbildungen

$$Sh(T,h) \hookrightarrow Sh(G,X) \qquad T \subset G, h \in X$$

über dem Kompositum $E \cdot E(T,h)$ definiert ist, bzgl. der kanonischen Struktur im Sinne von 3.3.11 auf $Sh(T,h)$.

(3.3.13) Bemerkung. Diese Definition ist konsistent mit der vorigen Definition, d. h. falls wir zwei Tori

$$h \hookrightarrow T_1 \subset T_2$$

haben, und T_1 sowie T_2 ein kanonische Modelle besitzen (nach Definition 3.3.11), so ist der zugehörige Morphismus

$$Sh(T_1,h) \to Sh(T_2,h),$$

wie leicht zu überprüfen ist, über dem Reflexkörper $E(T_1,h) = E(T_2,h)$ definiert.
Es genügt ferner, um die Aussage zu prüfen, für jeden Morphismus $h \hookrightarrow G$ *irgendeinen* $\mathbb{Q}$-Torus T mit $h : \mathbb{S} \hookrightarrow T \subset G$ zu wählen, falls ein solcher existiert.

Dies motiviert die folgende Verallgemeinerung der Definition des Reflexkörpers: Sei dazu $\widetilde{X} = \{\mu_h \mid h \in X\}$.

(3.3.14) Definition. Der Reflexkörper $E(G,X)$ zum Datum (G,X) ist definiert durch

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|E) = \left\{ g \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|E) \mid {}^g\widetilde{X} = \widetilde{X} \right\}$$

(3.3.15) Definition. Für ein E-kanonisches Modell von $Sh(G,X)$ gilt dann auf jeden Fall $E(G,X) \subset E$. Im Falle $E = E(G,X)$ nennen wir das Modell *kanonisch*.

(3.3.16) Satz. Falls M und M' kanonische Modelle von $Sh_K(G,X)$ und $Sh_{K'}(G,X)$ ($K \subseteq K'$) sind, dann sind alle Abbildungen $J_{K,K'}(y): M \to M'$ über $E(G,X)$ definiert.

Beweis. siehe [13, Proposition 12.3]. □

Für den Spezialfall $J_{K,K}(1)$ erhält man:

(3.3.17) Korollar. Ein kanonisches Modell von $Sh(G,X)$ ist, falls es existiert, eindeutig.

3.4 M als kanonisches Modell von $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$

Sei nun h vom Typ $(-1,0),(0,-1)$ und

$$h : \mathbb{S} \hookrightarrow T_F \overset{\iota}{\hookrightarrow} GSp,$$

wie in Abschnitt 2.4 gegeben. Sei $E = E(T_F, h)$ der Reflexkörper. Bezeichne L die galoische Hülle von E in $\mathbb{C}$. Fixiere eine Einbettung $F \hookrightarrow L$.

Die Reflexnorm

(3.4.1) Die zugehörige Reflexnorm

$$N_h : E^x \xrightarrow{R_{E/\mathbb{Q}}\mu_h} R_{E/\mathbb{Q}}(T_F) \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}}} T_F \subset F^x$$

wird durch die Abbildung auf den Charakteren

$$X^*(N_h) : X^*(F^x) \to X^*(E^x)$$

beschrieben, die durch das Element

$$M := \sum_{\alpha : E \to \mathbb{C}} [\alpha] \otimes \sigma_\alpha \Phi \quad \in \quad X^*(E^x) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(F^x)$$

gegeben ist. Dabei ist σ_α ein Element aus $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$, welches bzgl. der fest gewählten Einbettung α induziert. Nach der Charakterisierung des Reflexkörpers hängt $\sigma_\alpha \Phi$ nicht von dieser Wahl ab.
Es ist

$$\begin{aligned} M_{[\alpha],[\beta]} = \langle \sigma_\alpha \Phi, [\beta] \rangle &= \begin{cases} 1 & \sigma_\alpha^{-1}[\beta] \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \sigma_\beta^{-1}[\alpha] \in \Phi^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei Φ^{-1} der zugehörige CM-Typ auf E ist - er wird induziert durch die

$$\left\{ s^{-1} \mid s \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}), s|_F \in \Phi \right\}.$$

Daher kann man auch schreiben:

$$M = \sum_{\alpha : F \to \mathbb{C}} \sigma_\alpha \Phi^{-1} \otimes [\alpha] \quad \in \quad X^*(E^x) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(F^x)$$

Daraus folgt, dass die zugehörige Abbildung auf den $\mathbb{Q}$-, bzw. $\mathbb{A}_f$-Punkten

$$N_h(\mathbb{Q}) : E^* \to F^*,$$

bzw.

$$N_h(\mathbb{A}_f) : \mathbb{A}_E^* \to \mathbb{A}_F^*$$

durch

$$x \mapsto \prod_{\Phi^{-1} \ni \alpha : E \to \mathbb{C}} \alpha(x)$$

gegeben ist.

Das kanonische Modell

Das Datum am Anfang des Abschnittes induziert eine Abbildung

$$\iota^* : Sh(T_F, h) \hookrightarrow Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$$

und $Sh_K(T_F, h)$ parametrisiert dabei die Isomorphieklassen in $F^{(\iota)}pav_{g,\mathbb{C},K}$ (siehe 2.4) und auf $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ operiert die Galoisgruppe wie in 3.1 beschrieben. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass diese Galoisoperation das Bild von $Sh_K(T_F, h)$ festläßt und auf diesem Bild kanonisch wie in Definiton 3.3.11 ist.
Daraus folgt dann bereits:

(3.4.2) Satz. *M ist ein kanonisches Modell für $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$.*

Beweis. Wir haben dazu nur noch zu zeigen, dass es genügt, sich auf Einbettung von Tori T_F zu beschränken: Sei also ein $h \in X_{pol}^{-1}$ gegeben, welches über einen über $\mathbb{Q}$-definierten Torus faktorisiet.
Die Darstellung $h : \mathbb{S} \to GSp(V_{\mathbb{R}})$ zerfällt über $\mathbb{Q}$ in eine bzgl. alternierenden Form direkte Summe $h_i : \mathbb{S} \to GSp(V_{i\mathbb{R}})$ mit $V_{\mathbb{Q}} = \perp_i V_{i\mathbb{Q}}$, siehe 2.2.5.
h faktorisiert dann über das eingeschränkte Produkt $(\prod GSp(V_{i\mathbb{Q}}))^0$ (siehe 2.2.7). Seien h_i die Projektionen. Wähle maximale Tori T_i über die h_i fatorisieren. Die T_i sind von der Form T_F nach Lemma 2.4.3.
Nach Annahme gilt die Aussage also für alle Daten

$$\mathbb{S} \xhookrightarrow{h_i} T_{F_i} \xhookrightarrow{\iota_i} GSp(V_i).$$

Es gibt nun eine Abbildung

$$\left(\prod_i Sh_{K_i}(GSp(V_{i\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1})\right)^0 \to Sh(GSp(V_{\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1}),$$

der ein $\mathbb{Q}$-Morphismus

$$\left(\prod_i M_{g_i,K_i}\right)^0 \to M_{g,K}$$

entspricht, siehe 3.3.7.
Ferner ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_i Sh_{\iota_i^{-1}K_i}(T_{F_i}, h_i)\right)^0 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "\prod \iota_i^*"] & Sh_{\iota^{-1}K}(T, h) \arrow[d, hook, "\iota^*"] \\
\left(\prod_i Sh_{K_i}(GSp(V_{i\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1})\right)^0 \arrow[r] & Sh_K(GSp(V_{\mathbb{Q}}), X_{pol}^{-1}),
\end{tikzcd}$$

dabei ist T das eingeschränkte Produkt $(\prod T_{F_i})^0$.
Die linke und obere Abbildung sind bzgl. der entsprechenden Modelle über dem Reflexkörper $E(T,h) = E(T_{F_1}, h_1) \cdots E(T_{F_n}, h_n)$ definiert. Die untere Abbildung ist über $\mathbb{Q}$ definiert. Damit ist auch die rechte Abbildung über $E(T,h)$ definiert. □

(3.4.3) Bemerkung. Es genügt sogar (siehe Lemma 2.3.5 und die Bemerkung 3.3.13), sich auf den Fall einer einfachen abelschen Varietät zu beschränken, d. h. auf den Fall eines einfachen Reflextyps ($K = F$).

3.5 Komplexe Multiplikation

Abelsche Schemata A über S, wie oben, mit einer Einbettung

$$i : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}_S(A),$$

wobei $\mathcal{O}$ eine Ordnung in einem Zahlkörper F sei, bilden eine Kategorie $\mathcal{O}av_{g,S}$. Morphismen sollen mit der Abbildung i verträglich sein. Dabei wird wie immer gefordert, dass $i(F) \cap \mathrm{End}_S(A) = i(\mathcal{O})$ in $\mathrm{End}_S(A) \otimes \mathbb{Q}$.
Falls S das Spektrum eines Körpers ist und $\dim \mathcal{O} = 2 \dim A$ gilt in dieser Kategorie $\mathrm{End}_S(A, i) = i(\mathcal{O})$. Dies folgt durch Betrachten des Tate-Moduls.
Sei $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven Moduln über $\mathcal{O}$. Es gibt dann eine Einbettung:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{\mathcal{O}} & \to & \mathcal{O}av_S \\ P & \mapsto & P \otimes_{\mathcal{O}} A \end{array}$$

in die Kategorie der abelschen Schemata über S mit komplexer Multiplikation, wie oben. Sei dazu

$$\mathcal{O}^i \longrightarrow \mathcal{O}^j \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine freie Präsentation des Moduls P.
Das abelsche Schema $P \otimes_{\mathcal{O}} A$ wird dann als Quotient in der induzierten Sequenz

$$A^i \longrightarrow A^j \longrightarrow P \otimes_{\mathcal{O}} A \longrightarrow 0$$

konstruiert.
Ein Morphismus $\alpha : P \to P'$ läßt sich wegen der Projektivitäts-Eigenschaft immer liften und führt zu einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^j \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ \mathcal{O}^k \arrow[r] & \mathcal{O}^l \arrow[r] & P' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$

Dieses definiert einen Morphismus $\alpha : P \otimes_{\mathcal{O}} A \to P' \otimes_{\mathcal{O}} A$, durch den induzierten Morphismus auf den Quotienten:

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r] \arrow[d] & A^j \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_{\mathcal{O}} A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & 0 \\ A^k \arrow[r] & A^l \arrow[r] & P' \otimes_{\mathcal{O}} A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Gleichzeitig ist dadurch die Unabhängigkeit der Konstruktion von der gewählten freien Präsentation gezeigt, denn $\mathrm{id} : P \to P$ induziert ebenfalls ein kommutatives Diagramm (1) welches zu einem Isomorphismus zwischen den konstruierten abelschen Schemata führt.
P ist stets ein direkter Summand von $\mathcal{O}^i$:

$$\mathcal{O}^i \cong P \oplus P',$$

daraus folgt nach obiger Konstruktion die Isomorphie:

$$A^j \cong (P \otimes_{\mathcal{O}} A) \times_S (P' \otimes_{\mathcal{O}} A).$$

Da der Funktor Lie additiv ist, folgt daraus die Exaktheit der Sequenz

$$\mathrm{Lie}(A^i/S) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^j/S) \longrightarrow \mathrm{Lie}(P \otimes_{\mathcal{O}} A/S) \longrightarrow 0.$$

Dies impliziert

$$\mathrm{Lie}(P \otimes_{\mathcal{O}} A/S) \cong P \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Lie}(A/S),$$

bzgl. der induzierten Operation von $\mathcal{O}$ auf $\mathrm{Lie}(A/S)$. Dieser Isomorphismus ist funktoriell in P.

(3.5.1) Für $S = \mathrm{spec}(\mathbb{C})$ bekommt man aus denselben Gründen funktorielle Isomorphismen

$$H_1(P \otimes_{\mathcal{O}} A, M) \cong P \otimes_{\mathcal{O}} H_1(A, M)$$

für beliebige abelsche Gruppen M. Falls $H_1(A, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{O}_F$ als $\mathcal{O}_F$-Modul, folgt daraus, dass $H_1(\cdot \otimes_{\mathcal{O}_F} A, \mathbb{Z})$ äquivalent zur Identität auf $\mathcal{O}_F$-*mod* ist.
Umgekehrt ist ein Paar (A', i') genau dann zu einem $(P \otimes_{\mathcal{O}_F} A, i)$ isomorph, wenn (A, i) und (A', i') denselben CM-Typ (siehe 2.3.3) haben. Das folgt aus der Klassifikation der Isomorphieklassen in 2.3.

(3.5.2) Für den Beweis des Hauptsatzes der komplexen Multiplikation benötigen wir eine Beschreibung gewisser Isogenien. Sei dazu ein Objekt der Kategorie

$$F^{(\iota)}pav_{2g,\mathbb{C},K(N)}$$

gegeben. $K(N)$ bzgl. $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F \cdot v$. Es ist isomorph zu einem Objekt im Bild einer der Einbettungen

$$\mathcal{O}_c^{(\iota)}pav_{2g,\mathbf{d},\mathbb{C},N} \xrightarrow{c} F^{(\iota)}pav_{2g,\mathbb{C},K(N)}$$

siehe 1.10 und 2.2. Dabei kann man o. b. d. A. $c_p = 1$ für alle $p|N$ annehmen.
Sei (A, Φ, i, γ) das Urbild mit zugehöriger Hodgestruktur

$$(L_{\mathbb{Z}} = H_1(A, \mathbb{Z}), T_F(\mathbb{Z})\alpha, \{F_0\}, \gamma),$$

bzw. adelisch

$$(L_{\mathbb{Q}} = H_1(A, \mathbb{Q}), T_F(\mathbb{Q})\alpha_{\mathbb{Q}}, \{F_0\}, \xi K(N)).$$

Seien ferner ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(\mathbb{C})} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma"] & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(\mathbb{C})} \arrow[d, "\gamma'"] \\
A \arrow[r, "\mu"] & P \otimes_{\mathcal{O}_F} A
\end{tikzcd}$$

gegeben.
Wir machen folgende Annahme: $P \otimes_{\mathcal{O}_F} L_{\mathbb{Z}}$ kann so in $L_{\mathbb{Q}}$ eingebettet werden, dass ein $\rho \in T_F(\mathbb{A}_f)$ mit $\rho_p = 1$ für alle $p|N$ und ein Isomorphismus α' existieren, mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{tikzcd}
& V_{\mathbb{Z}} \arrow[dl, hook] \arrow[dd, hook] & L_{\mathbb{Z}} \arrow[l, "\sim", "\alpha"'] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook, "\mu"] & \\
V_{\mathbb{Q}} & & & L_{\mathbb{Q}} \\
& {}^{\rho}V_{\mathbb{Z}} \arrow[ul, hook] & P \otimes_{\mathcal{O}_F} L_{\mathbb{Z}} \arrow[l, "\sim", "\alpha'"'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.
Es existiert dann eine Polarisation ϕ' von $P \otimes_{\mathcal{O}_F} A$ mit der Eigenschaft:

$${}^t\mu\phi'\mu = r^{-1}\phi,$$

wobei r die positive rationale Zahl mit $\rho\overline{\rho}\widehat{\mathbb{Z}} = r\widehat{\mathbb{Z}}$ ist,
das Objekt $(P \otimes_{\mathcal{O}_F} A, \phi', i, \gamma')$ liegt in der Kategorie

$$\mathcal{O}_{c\rho}^{(\iota)} pav_{2g,\mathbf{d},\mathbb{C},N}$$

und hat die ganzahlige Hodgestruktur

$$(P \otimes_{\mathcal{O}_F} L_{\mathbb{Z}}, T_F(\mathbb{Z})\alpha', \{F_0\}, \gamma')$$

bzw. adelisch

$$(L_{\mathbb{Q}}, T_F(\mathbb{Q})\alpha_{\mathbb{Q}}, \{F_0\}, \xi\rho K(N)).$$

D. h. der zugehörige Modulpunkt in $Sh(GSp, X_{pol}^{-1})$ ist gerade der mit der $G(\mathbb{A}_f)$-Rechtsoperation um $\iota(\rho)$ verschobene Punkt.

(3.5.3) Lemma. Sei $\mathcal{O}_F$ der Ganzheitsring im Körper F, $2\dim(A) = \dim(F)$ und S das Spektrum eines Körpers.
Daraus folgt im Falle der projektiven Moduln von Rang 1, dass

$$\mathcal{V}_{\mathcal{O}_F,1} \to \mathcal{O}_F av_{g,S}$$

eine volle Einbettung ist.

Beweis. Sei eine beliebige $\mathcal{O}_F$-Isogenie

$$\alpha : P \otimes_{\mathcal{O}_F} A \to P' \otimes_{\mathcal{O}_F} A$$

gegeben. Wähle irgendeine $\mathcal{O}_F$-lineare Abbildung $\mu : P' \to P$. Dann ist $x = \alpha\mu \in \mathrm{End}_S(A, i) = i(\mathcal{O})$ und damit $x\mu^{-1} : P \to P'$ ein Urbild des Morphismus α. $\square$

3.6 Reduktion

Das Néron-Modell

Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und A_K eine abelsche Varietät über K. Ein Néron-Modell für A_K ist ein glattes Gruppenschema A_R über R, deren Faser über dem generischen Punkt $\mathrm{spec}(K) \to \mathrm{spec}(R)$ gleich A_K ist, welches den Funktor

$$S \to \mathrm{Hom}(S_K, A_K)$$

auf der Kategorie der *glatten* Schemata über R darstellt. Es ist hierdurch natürlich eindeutig charakterisiert.

(3.6.1) Satz. Das Néron-Modell A_K von A_R exisitiert und ist von endlichem Typ über R.

Hier wichtiger ist:

(3.6.2) Satz. Falls A_R ein abelsches Schema ist, so ist es ein Néron-Modell der allgemeinen Faser $A_K = A_R \times_R K$.

Der absolute Frobenius

Sei S ein Schema der Charakteristik p. (Dies heißt per Definition, dass der eindeutige Morphismus $\mathrm{spec}(S) \to \mathrm{spec}(\mathbb{Z})$ über $\mathrm{spec}(\mathbb{F}_p)$ faktorisiert.) In diesem Fall gibt es den *absoluten* Frobenius-Morphismus

$$\mathrm{Frob}_S : S \to S$$

mit den Eigenschaften:

i. Frob_S ist die Identität auf den zugrundeliegenden topologischen Räumen,

ii. $\mathrm{Frob}_S^{\#}(U) : \mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_S(U)$ ist gegeben durch $f \mapsto f^p$.

Auf affinen Unterschemata $\mathrm{spec}(A_i)$ wird er induziert durch den Ringhomomorphismus

$$A_i \to A_i, f \mapsto f^p.$$

Man kann ihn also durch Verkleben dieser Morphismen auf einer affinen Überdeckung definieren.
Für jeden Morphismus $\alpha : S \to T$ von Schemata der Charakteristik p ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathrm{Frob}_S"] \arrow[d, "\alpha"'] & S \arrow[d, "\alpha"] \\ T \arrow[r, "\mathrm{Frob}_T"'] & T \end{tikzcd}$$

Der relative Frobenius

Seien T ein Schema über einer Basis S. (beide Schemata haben Charakteristik p), in diesem Fall ist Frob_T kein Morphismus von Schemata über S, wir erhalten jedoch einen solchen, den *relativen* Frobenius $F_{T/S} : T \to T^{(p,S)}$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "F_{T/S}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Frob}_T"] \arrow[d] & T^{(p,S)} \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ S \arrow[r, equal] & S \arrow[r, "\mathrm{Frob}_S"'] & S \end{tikzcd}$$

wobei $T^{(p,S)}$ den Pullback von T mittels $\mathrm{Frob}(S)$ bezeichne (definiert durch das rechte kartesische Quadrat).

(3.6.3) Lemma. Sei T ein Gruppenschema über S. Die Abbildung

$$\mathrm{Lie}(F_{T/S}) : \mathrm{Lie}(T/S) \to \mathrm{Lie}(T^{(p,S)}/S).$$

ist die Nullabbildung

Beweis. Die Abbildung $\mathrm{Lie}(\mathrm{Frob}_T)$ ist dual zur Abbildung $\mathrm{Frob}_T^* : \Omega^1(T/S) \to \Omega^1(T/S)$ auf den relativen Differentialformen. Diese ist auf affinen Teilen gegeben durch das Diffential der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Frob}_S^{\#}(U) : \mathcal{O}_S(U) & \to & \mathcal{O}_S(U) \\ f & \mapsto & f^p, \end{array}$$

also durch die Abbildung $df \mapsto pf^{p-1}df = 0$. Damit ist auch $\mathrm{Lie}(\mathrm{Frob}_T) = 0$ und somit auch $\mathrm{Lie}(F_{T/S})$. □

3.7 Beweis des Hauptsatzes

In diesem Abschnitt wird der fehlende, essentielle Spezialfall bewiesen, aus dem dann Satz 3.4.2 folgt:

(3.7.1) Für alle zulässigen Einbettungen

$$\mathbb{S} \overset{h}{\hookrightarrow} T_F \overset{\iota}{\hookrightarrow} GSp$$

mit einfachem CM-Typ und für ein kofinales System von kompakt offenen Gruppen K gilt für

$$[h, \xi] \in Sh_K(T_F, h)$$

$\iota^*([h, \xi])$ ist über einem abelschen Erweiterungskörper F von $E = E(T_F, h)$ definiert und für $\sigma \in \mathrm{Gal}(F|E)$ gilt

$$^{\sigma}\iota^*([h, \xi]) = \iota^*([h, \xi \cdot N_h(\mathrm{rec}(\sigma))])$$

Für das kofinales System wähle ein Gitter $V_{\mathbb{Z}}$, welches zur Hauptordnung gehört, i. e.

$$\mathcal{O}_F = \{x \in F \mid \iota(x)V_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}\}.$$

und bilde die Gruppen $K(N)$ bzgl $V_{\mathbb{Z}}$ und für $N \gg 1$.
Zu einem gegebenen Punkt $[h, \xi] \in Sh_{K(N)}(T_F, h)$ korrespondiert nun eine Isomorphieklasse

$$(A, i, \phi, \gamma) \in (\mathcal{O}_F)_c^{(\iota)} pav_{g,\mathbf{d},N,\mathbb{C}},$$

wobei $\mathbf{d}$ der Typ des Gitters $V_{\mathbb{Z}}$ ist. Der Definitionskörper F von $\iota^*([h, \xi])$ und damit wegen der Darstellbarkeit von (A, ϕ, γ) ist endlich, da insgesamt nur endlich viele Isomorphieklassen von polarisierten abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_F$ existieren

und es auch nur endlich viele verschiedene Level-N-Strukturen darauf gibt. (Die komplexe Multiplikation i ist dann ebenfalls über einer endlichen Erweiterung definiert.)
Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|E)$ ist (wegen Čebotarev[2]) ein Frobenius-Element $\sigma_\wp$, $\wp|p$ mit den Eigenschaften

i. $p \not| M$,

ii. p ist unverzweigt in L (d. h. in K und F).

Es genügt daher

$$^\sigma(\iota^*([h,\xi])) = \iota^*([h, \xi \cdot N_h(\pi_\wp^{-1})])$$

zu zeigen. Dabei ist $\pi_\wp$ das Idel, welches an der Stelle $\wp$ gleich einem Primelement ist und ansonsten 1. (Die Wahl des Primelementes $\pi_\wp \in E_\wp$ spielt keine Rolle, da $N_h(\widehat{\mathcal{O}}^*_{E_\wp}) \subset K(N)$)

(3.7.2) Lemma. Sei $(A,i) \in \mathcal{O}av_\mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und sei Φ der CM-Typ von (A,i). Der CM-Typ von $(^\sigma A, {}^\sigma i)$ ist dann gleich $\sigma \circ \Phi$.

Beweis. Sei Φ der CM-Typ von (A,i). Er ist bestimmt durch die Charakterisierung

$$\mathrm{Lie}(A) \cong \bigoplus_{\Phi \ni \mu : F \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\mu)}$$

als F-Moduln.
Aus dem Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} {}^\sigma A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ \mathrm{spec}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\mathrm{spec}(\sigma)"] & \mathrm{spec}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

erhält man einen funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{Lie}(^\sigma A) = \mathbb{C} \otimes_{\sigma,\mathbb{C}} \mathrm{Lie}(A) \quad \text{(vgl. 3.1.13)}$$

Die Operationen $i : \mathcal{O} \to \mathrm{End}(A)$ und $^\sigma i : \mathcal{O} \to \mathrm{End}(^\sigma A)$ sind wegen der Funktorialität mit diesem Isomorphismus verträglich. Insbesondere

$$\mathrm{Lie}(^\sigma A) \cong \mathbb{C} \otimes_{\sigma,\mathbb{C}} \bigoplus_{\Phi \ni \mu : F \to \mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\mu)} \cong \bigoplus_{\Phi \ni \mu : F \to \mathbb{C}} \mathbb{C}^{(\sigma^{-1}\mu)}$$

als F-Moduln. Daraus folgt, dass der CM-Typ von $(^\sigma A, {}^\sigma i)$ durch $\sigma \circ \Phi$ gegeben ist. □

[2]Der Satz von Čebotarev ([16, Theorem 13.4]) besagt folgendes: Sei $L|E$ galoissch. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|E)$ bilden die Primideale $\wp$ von E, bzgl. derer eine Stelle $\mathcal{P}|\wp$ mit

$$x^\sigma \equiv x^{\deg(\wp)} \mod \mathcal{P} \quad \forall x \in \mathcal{O}_L$$

existiert, eine Teilmenge mit der Dirichlet-Dichte $(\#\langle\sigma\rangle)/\deg(L|E)$, wobei $\langle\sigma\rangle$ die Konjugationsklasse von σ ist. Wendet man dieses auf $\mathrm{Gal}(\widetilde{L}|\mathbb{Q})$, so erhält man sogar den Zusatz, dass sich unter diesen in E voll zerlegte Primelemente befinden, d. h. man könnte im Beweis oben sogar $r = \deg(\wp) = 1$ annehmen. Begründung: Aus der Einschränkung $x = x^\sigma \equiv x^p \mod \wp \quad \forall x \in \mathcal{O}_E$ folgt, dass $\wp$ voll zerlegt sein muß.

(3.7.3) Lemma. Sei $[A, i, \phi, \gamma] \in (\mathcal{O}_F)_c^{(\iota)} pav_{g,\mathbf{d},N,\mathbb{C}}$ gegeben und sei alles über einem Zahlkörper $K \subset \mathbb{C}$ definiert. Für ein Frobenius-Element $\sigma_\wp$ von $K|E$ mit den Eigenschaften oben existiert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(K)} \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\gamma"'] & & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(K)} \arrow[d, "{}^{\sigma_\wp}\gamma"] \\
A \arrow[r, "incl."'] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \left(\prod_{\mu \in \Phi^{-1}} \mu(\wp)\right)^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_F} A \arrow[r, "\sim"'] & {}^{\sigma_\wp}A
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die untere linke Abbildung durch die Inklusion $\mathcal{O}_F \hookrightarrow \prod_{\mu \in \Phi^{-1}} \mu(\wp)^{-1}$ induziert. Für die Polarisationen gilt die Relation

$$^t\alpha({}^{\sigma_\wp}\phi)\alpha = p^{\deg(\wp)}\phi.$$

Beweis. Es ist erstens

$$^{\sigma_\wp}A \cong P \otimes_{\mathcal{O}} A$$

bzgl. eines projektiven Rang 1 Moduls P. Dies folgt aus $\sigma_\wp \in \mathrm{Fix}(E)$, dem vorigen Lemma, sowie 3.5.1.
Sei L die galoische Hülle von K in $\mathbb{C}$ und fixiere eine Einbettung $F \hookrightarrow L$. Seien $\mathcal{P}_L$ und $\mathcal{P}_K$ Stellen über $\wp$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & L \arrow[dl] \arrow[ddrr] & & & & \mathcal{P}_L \arrow[dl] & \\
K \arrow[dr] & & & & \mathcal{P}_K \arrow[dr] & & \\
 & E \arrow[dr] & & F \arrow[dl] & & \wp \arrow[dr] & \\
 & & \mathbb{Q} & & & & p
\end{tikzcd}$$

Es existiert wegen der Darstellbarkeit von M über $\mathbb{Z}[1/N]$ ein abelsches Schema A_R über einem $R = \mathcal{O}_L[1/M]$ mit $N|M$, $A_R \times_R \mathbb{C} = A$ und $\xi : (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_R \to A_R[N]$. Sei $k = R/\mathcal{P}_L = \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$.
A_R ist nach Satz 3.6 ein Néron-Modell für A ist. Es gilt also insbesondere $\mathrm{Hom}_R(A_R, A_R) = \mathrm{Hom}_K(A, A)$, d. h. $(A_R, i) \in \mathcal{O}_F av_{2g,\mathrm{spec}(R)}$.

Man hat dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(k)} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\xi"'] & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(k)} \arrow[r, "\mathrm{spec}(\sigma_\wp)"] \arrow[d, "\sigma_\wp \xi"'] & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(k)} \arrow[d, "\xi"] \\
A_k \arrow[r, "F^r_{A_k/k}"'] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend left=80, "\mathrm{Frob}^r"] & {}^{\sigma_\wp}A_k \cong P \otimes_{\mathcal{O}} A_k \arrow[r] \arrow[d] & A_k \arrow[d] \\
\mathrm{spec}(k) \arrow[r, equal] & \mathrm{spec}(k) \arrow[r, "\mathrm{spec}(\sigma_\wp)"'] & \mathrm{spec}(k)
\end{tikzcd}$$

dabei ist $r = \deg(\wp)$. (Der absolute Frobenius Frob operiert auf den k-wertigen Punkten trivial.)
Man betrachte nun das kommutative Diagramm von Funktoren:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_F av_R \arrow[dd, "\times_R k"] \\
\mathcal{V}_{\mathcal{O}_F,1} \arrow[ur, "A_R \otimes \mathcal{O}_F"] \arrow[dr, "A_k \otimes \mathcal{O}_F"] & \\
 & \mathcal{O}_F av_k
\end{tikzcd}$$

Da die Funktoren links volle Einbettungen sind, liegt auch $F_{A_k/k} : A_k \to {}^{\sigma_\wp}A_k = P \otimes_{\mathcal{O}} A_k$ im Bild des unteren linken Funktors, denn er vertauscht mit der Operation von $\mathcal{O}_F$ und ist somit ein Morphismus der Kategorie $\mathcal{O}_F av_{2g,k}$. Es folgt, dass der linke Teil des obigen Diagramms die Reduktion von

$$\begin{tikzcd}
(V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(R)} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\xi"'] & (V_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_{\mathrm{spec}(R)} \arrow[d, "\sigma_\wp \xi"] \\
A_R \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & P \otimes_{\mathcal{O}_F} A_R \arrow[d] \\
\mathrm{spec}(R) \arrow[r, equal] & \mathrm{spec}(R)
\end{tikzcd}$$

bzgl. eines

$$\alpha : \mathcal{O}_F \to P$$

ist. Man beachte, dass die Reduktionsabbildung eine Bijektion $A_R[N](R) \to A_k[N](k)$ induziert.
Nun ist die Reduktion von

$$\mathrm{Lie}(\alpha) : \mathrm{Lie}(A|R) \to P \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathrm{Lie}(A|R)$$

Null, d. h. $\alpha(\mathcal{O}_F) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Lie}(A|k))P$. Folglich faktorisiert α über die Inklusion

$$\mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathrm{Ann}(\mathrm{Lie}(A|k))^{-1}.$$

Da $\mathrm{Lie}(A_k|k) = k \otimes_R \mathrm{Lie}(A_R|R)$ und $\mathrm{Lie}(A_R|R)$ ist ein *projektiver* R-Modul von positivem Rang ist, folgt

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Lie}(A|k)) = \{o \in \mathcal{O}_F \mid o\,\mathrm{Lie}(A_R|R) \subseteq \mathcal{P}_L\,\mathrm{Lie}(A_R|R)\}\,,$$

d. h.

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Lie}(A|k)) = \bigcap_{\mu\in\Phi} \mu^{-1}(\mathcal{P}_L),$$

da $\mathrm{Lie}(A_L|L) \cong \bigoplus_{\Phi\ni\mu:F\hookrightarrow L} L^{(\mu)}$ als $\mathcal{O}_F$-Moduln. Da $p \in L$ unverzweigt ist, lässt sich dies als

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Lie}(A|k)) = \prod_{\mu\in\Phi^{-1}} \mu(\wp)$$

schreiben[3]. Zwischen den Polarisationen ϕ und ${}^{\sigma_\wp}\phi$ besteht folgende Relation: Für alle $x, y \in T_l(A)(\overline{k}), l \neq p$ gilt:

$$\epsilon(\alpha x, {}^{\sigma_\wp}\phi\alpha y) = F^r_{\zeta_N|k}(\epsilon(x, \phi y))$$

Da $F^r_{\zeta_N|k}$ auf Einheitswurzeln mit Potentierung durch p^r operiert, folgt daraus (unter Verwendung von Satz 3.1.5) die Relation

$${}^t\alpha({}^{\sigma_\wp}\phi)\alpha = p^{\deg(\wp)}\phi$$

Daraus folgt nun, dass der Grad von α gleich $p^{g\deg(\wp)}$ ist. Der Grad der durch die Inklusion

$$\mathcal{O}_F \hookrightarrow (\prod_{\mu\in\Phi^{-1}} \mu(\wp))^{-1}.$$

induzierten Abbildung ist aber ebenfalls $p^{g\deg(\wp)}$.
Daraus folgt, dass sich α von dieser höchstens um einen Automorphismus unterscheidet.

□

Ende Beweis des Hauptsatzes. Nach 3.5.2 und dem vorausgehenden Lemma ist die rationale Hodgestruktur von $({}^{\sigma_\wp}A, {}^{\sigma_\wp}i, {}^{\sigma_\wp}\phi, {}^{\sigma_\wp}\gamma)$ durch

$$[L_\mathbb{Q}, T_F(\mathbb{Q})\alpha_\mathbb{Q}, \{F_0\}, \xi \prod_{\Phi^{-1}\ni\mu:E\hookrightarrow\mathbb{C}} \mu(\pi_\wp)^{-1}K(N)]$$

gegeben, denn das ρ aus 3.5.2 muss

$${}^\rho\mathcal{O}_F = (\prod_{\Phi^{-1}\ni\mu} \mu(\wp))^{-1}$$

erfüllen. Die Bedingung an die Polarisation ist erfüllt, da $\overline{\rho}\rho = p^{-\deg(\wp)}$.
D. h. dieser Automorphismus $\sigma_\wp$ operiert wie in der Definition des kanonischen Modelles für T_F (3.3.11) gefordert - siehe auch die explizite Beschreibung der Reflexnorm 3.4.1. Es folgt ferner, dass die Galoisoperation kommutativ ist, so dass (wegen der Darstellbarkeit) (A, i, ϕ, γ) über einer *abelschen* Erweiterung von E definiert ist. □

[3]Beachte, dass Φ^{-1} dieselben Einbettungen $E \hookrightarrow \mathbb{C}$, die durch verschiedene $\mu^{-1}, \mu \in \Phi$ induziert werden, nur einmal enthält.

3.8 Erzeugung von Klassenkörpern

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Klassenkörper durch die Modulpunkte der abelschen Varietäten mit komplexer Multiplikation erhalten werden können. Die Darstellung folgt im wesentlichen [11].

Reflex

Oben wurde gezeigt, dass die Reflexnorm

$$N_h : E^x \xrightarrow{R_{E/\mathbb{Q}}\mu_h} R_{E/\mathbb{Q}}(T_F) \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}}} T_F \subset F^x$$

durch die Abbildung auf den Charakteren

$$X^*(N_h) : X^*(F^x) \to X^*(E^x)$$

beschrieben wird, die durch das Element

$$M = \sum_{\alpha:F\to\mathbb{C}} \sigma_\alpha \Phi^{-1} \otimes [\alpha] \quad \in \quad X^*(E^x) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(F^x)$$

gegeben ist. Dabei ist σ_α ein Element aus $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$, welches bzgl. der fest gewählten Einbettung α induziert.
Das Bild dieser Abbildung gleichzeitig der kleinste $\mathbb{Q}$-Torus, über den h-faktorisiert. Sein Rang ist der Rang des CM-Typs, d. h. der $\mathbb{Z}$-Rang von $\mathbb{Z}[G]\Phi$. Begründung: Die Kocharaktere des Bild-Torus werden gegeben durch

$$\mathbb{Q}(X_*(E^x) \cdot M) \cap \mathbb{Z}[G] = (\mathbb{Q}[G]\Phi) \cap \mathbb{Z}[G].$$

Der größte Quotient von E^x über den die obige Abbildung faktorisiert, wird durch das Kocharaktergitter:

$$M \cdot X^*(F^x) = \mathbb{Z}[G]\Phi^{-1}.$$

gegeben. Es gilt auch

$$X_*(E^x) \cdot M \subset \{\gamma \in X_*(F^x) \mid (\sigma - 1)(\rho + 1)\gamma = 0 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})\}$$

und

$$M \cdot X^*(F^x) \subset \{\gamma \in X^*(E^x) \mid (\sigma - 1)(\rho + 1)\gamma = 0 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})\}.$$

Ersteres ist nur nocheinmal die Aussage, dass das Bild der Reflexnorm in T_F enthalten ist.
Der Torus der durch

$$\{\gamma \in X^*(E^x) \mid (\sigma - 1)(\rho + 1)\gamma = 0 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{Q})\} \subset X^*(E^x)$$

beschrieben wird, ist der Serre-Torus S^E. Er passt in die zur definierenden Sequenz für T_F 'duale' Sequenz:

$$1 \longrightarrow (E^+)^x \longrightarrow E^x \times \mathbb{G}_m \longrightarrow S^E \longrightarrow 1.$$

Sei μ^E der Kocharakter von S^E, der durch die Abbildung $X^*(S^E) \to X^*(\mathbb{G}_m)$, $\sum \xi_\alpha[\alpha] \mapsto \xi_1$ gegeben wird. Das Paar (S^E, μ^E) hat die Eigenschaft, dass der Morphismus $(\rho+1)\mu^E$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist. Es ist universell mit dieser Eigenschaft, d. h. falls ein anderes Paar (T, μ), mit den Eigenschaften: $\mu : \mathbb{G}_m \to T$ ist über E definiert und $(\rho+1)\mu$ ist über $\mathbb{Q}$ definiert, gegeben ist, so existiert ein eindeutig bestimmter $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $N_\mu : S^E \to T$, der dass Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{G}_m \arrow[dl, "\mu^E"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ S^E \arrow[rr, "N_\mu"'] & & T \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Dies sieht man daran, dass das Paar $(X^*(E), X^*(\mu^E))$, wie oben definiert, eine entsprechende duale universelle Eigenschaft hat.
In diesem Fall genießt das Paar (T_F, μ_h) die entsprechenden Eigenschaften ($(\rho+1)\mu_h$ ist hier der Gewichtsmorphismus w_h) und der resultierende zusammengesetzte Morphismus

$$E^x \longrightarrow S^E \xrightarrow{N_{\mu_h}} T_F$$

ist gerade die Reflexnorm N_h.

Klassenkörper

Betrachte den Körper $E(T_F, h, K)$, der aus E durch Adjunktion der Koordinaten aller Punkte aus $\iota^*(Sh_K(T_F, h))$ entsteht. Dies ist für genügend kleines K (wegen der Darstellbarkeitseigenschaft von M) der Körper, der durch Adjunktion der Koordinaten der Torsionspunkte zum Definitionskörper der zugehörigen abelschen Varietäten entsteht. Er ist wegen der kanonisches-Modell-Eigenschaft unabhängig von der Einbettung ι.
Die Galoisoperation wird durch die Reflexnorm

$$\mathrm{Gal}(E^{ab}|E) \cong E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{N_h} T_F(\mathbb{Q})\backslash T_F(\mathbb{A}_f)$$

beschrieben, die über S^E faktoriert:

$$E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A}_f) \to S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}_f) \to T_F(\mathbb{Q})\backslash T_F(\mathbb{A}_f).$$

Der Körper $E(T_F, h, K)$ ist also der Klassenkörper zur Gruppe $N_h^{-1}(K)$. Der Körper

$$E(T_F, h) := \{\text{Kompositum über alle } E(T_F, h, K)\}$$

gehört zur Gruppe $\ker(N_h)$.
Betrachtet man alle abelschen Varietäten, deren Reflexkörper in E enthalten ist, d. h. alle Paare (T_F, h), so dass μ_h über E definiert ist, so gehört der Körper

$$E^{cm} := \{\text{Kompositum über alle } E(T_F, h, K), \text{ wobei } \mu_h \text{ über } E \text{ definiert ist}\}$$

zur Gruppe

$$\bigcap_{N_h, \mu_h \text{ ist über } E \text{ definiert}} \ker(N_h).$$

Diese Gruppe ist nichts anderes als

$$\ker(E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A}_f) \to S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}_f)).$$

Beweis. Dies folgt daraus, dass das Paar (S^E, μ^E) universell mit derjenigen Eigenschaft ist, bzgl. der wir alle (wesentlichen) Paare (T_F, μ_h) ausgewählt haben. Man sieht dies auch elementar, wie folgt: Es gilt

$$X^*(S^E) = \sum_{\Phi} Z[G]\Phi$$

wobei die Summe über alle CM-Typen von E genommen ist, denn alle Elemente $[\alpha] - [\rho\alpha]$, die rechts enthalten sind, spannen zusammen mit einem Φ die Gruppe $X^*(S^E)$ auf. Man erhält also eine *injektive* Abbildung

$$S^E \xrightarrow{\Pi_{N_h}} \prod T_F \ ,$$

wobei das Produkt über alle oben betrachteten Paare geht. □

Es gibt nun eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow (E^+)^x(\mathbb{Q})\backslash(E^+)^x(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^* \times E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A}) \longrightarrow S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}) \longrightarrow 0$$

(wegen $H^1(\mathbb{Q}, (E^+)^x) = H^1(\mathbb{Q}_\wp, (E^+)^x) = 1$) und daher eine exakte Sequenz

$$\pi_0((E^+)^x(\mathbb{Q})\backslash(E^+)^x(\mathbb{A})) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^* \times E^x(\mathbb{Q})\backslash E^x(\mathbb{A})) \longrightarrow S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}_f) \longrightarrow 0$$

Mit Hilfe der Klassenkörpertheorie übersetzt sich dies in die exakte Sequenz

$$\mathrm{Gal}(E^{+ab}|E^+) \xrightarrow{|_{\mathbb{Q}^{ab}} \times \mathrm{Ver}} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}|\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(E^{ab}|E) \longrightarrow S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}_f) \longrightarrow 0,$$

dabei ist $\mathrm{Ver} : \mathrm{Gal}(E^{+ab}|E^+) \to \mathrm{Gal}(E^{ab}|E)$, die *Verlagerung* [16, Kapitel IV, Satz 5.9]. Der Kern der Abbildung

$$\mathrm{Gal}(E^{ab}|E) \to S^E(\mathbb{Q})\backslash S^E(\mathbb{A}_f),$$

die Gruppe, die zum Körper E^{cm} gehört, ist also gerade

$$\mathrm{Ver}(\mathrm{Gal}(E^{+ab}|E^+ \cdot \mathbb{Q}^{ab})).$$

(3.8.1) Bemerkung. Oft ist bereits $\mathbb{Z}[G]\Phi^{-1} = X^*(S^E)$, d. h. nach den Betrachtungen oben folgt, dass bereits eine abelsche Varietät mit CM-Typ Φ, ausreicht, um diesen maximal möglichen Klassenkörper zu erzeugen. Falls $E = F$ ein imaginär quadratischer Zahlkörper ist, ist dies natürlich immer der Fall und $E^{cm} = E(T_F, h) = E^{ab}$.

(3.8.2) Bemerkung. Sei der CM-Typ von Φ einfach und sei $\dim(F|\mathbb{Q}) = 2g$ und $\dim(E|\mathbb{Q}) = 2h$. Es ist dann $\dim S^E = h + 1$ und $\dim T_F = g + 1$. Es stimmen ferner der Rang d von $\mathbb{Z}[G]\Phi^{-1}$ (als $\mathbb{Z}$-Modul), der Rang von $\mathbb{Z}[G]\Phi$ und der Rang der Matrix M oben überein.

(nach 3.4.1 stimmen die ersteren beiden mit dem Rang der Matrix M bzw. ihrer Transponierten überein.)
Es gibt für diese Werte die Abschätzungen

$$\max(\log_2(4g), \log_2(4h)) \leq d \leq \min(g+1, h+1).$$

Die rechte Ungleichung folgt aus $\mathbb{Z}[G]\Phi^{-1} \subseteq X^*(S^E)$ und $\mathbb{Z}[G]\Phi \subseteq X_*(T_F)$; die linke Abschätzung ist von Ribet. Siehe auch Lang [9, Chapter 6, Theorem 1.2] und die Arbeiten von Kubota [8] und Ribet [18].
Falls der CM-Typ nicht einfach ist, gelten obige Abschätzungen sogar für $2g = \dim(K|\mathbb{Q})$, wobei K der kleinste Teilkörper von F ist, von dem sich der CM-Typ liften läßt (vgl. 2.3.4).
Auch im Fall $d = h+1$ muss nicht unbedingt $\mathbb{Z}[G]\Phi^{-1} = X^*(S^E)$ gelten. Allerdings kenne ich keine Gegenbeispiele.

Anhang A

Diverses

A.1 Konjugationsklassen maximaler Tori

Sei F ein Körper und G eine algebraische F-Gruppe. Sei T ein maximaler F-Torus. Da über F^{sep} alle maximalen Tori konjugiert sind, haben wir für alle Körper $K \supseteq F$ eine Bijektion

$$\{\text{maximale } K\text{-Tori}\} \cong (G/N(T))(K)$$

sowie, falls wir die Einbettung $\eta : T \hookrightarrow G$ betrachten:

$$\{\text{Einbettungen } \eta' \text{ von Tori, die über } F^{sep} \text{ zu } \eta \text{ konjugiert sind}\} \cong (G/T)(K)$$

Wir interessieren uns insbesondere für die F-Konjugationsklassen in $(G/N(T))(F)$, bzw. $(G/T)(F)$. Dazu betrachte die exakte Sequenz punktierter Mengen

$$0 \longrightarrow N(T,F) \longrightarrow G(F) \longrightarrow (G/N(T))(F) \longrightarrow H^1(F,N(T)) \longrightarrow H^1(F,G)$$

bzw.

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G(F) \longrightarrow (G/T)(F) \longrightarrow H^1(F,T) \longrightarrow H^1(F,G)$$

Hieraus kann man (durch Twist bzw. Konjugation) ablesen, dass es Bijektionen gibt:

$$\{F\text{-Konjugationsklassen maximaler Tori}\} \cong \ker(H^1(F,N(T)) \to H^1(F,G))$$

$$\{F\text{-Konjugationsklassen von Einbettungen wie oben}\} \cong \ker(H^1(F,T) \to H^1(F,G))$$

Elementarer: Seien T und T_1 zwei Tori und $g \in G(\mathbb{C})$ mit

$$g_1 T g_1^{-1} = T_1.$$

Dann definiert $\sigma \mapsto g_1^{-1\sigma} g_1$ das entsprechende Element in $H^1(F,N(T))$. Definieren zwei Tori T_1 und T_2 auf diese Weise dasselbe Element so gilt

$$g_1^{-1\sigma} g_1 = n^{-1} g_2^{-1\sigma} g_2{}^{\sigma} n,$$

mit $n \in N(T,\mathbb{C})$, d. h. $g_2 n g_1^{-1} \in G(F)$ und konjugiert die beiden Tori.

Falls umgekehrt ein Kozykel $\{a_\sigma\} \in ker(H^1(F,N(T)) \to H^1(F,G))$ gegeben ist, so heißt dies $a_\sigma = {}^{\sigma}g g^{-1}$ für ein $g \in G(F^{sep})$. Der Torus $T' = gTg^{-1}$ ist dann ein Torus, der die entsprechende $G(\mathbb{Q})$-Konjugationsklasse repräsentiert.

Ebenso für Einbettungen.

Wir nehmen im folgenen der Einfachheit halber an: $H^1(F,G) = 1$.
Betrachte nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} N(T) \xrightarrow{p} W(T) \longrightarrow 0$$

und die dazugehörige Kohomologiesequenz:

$$W(T,F) \longrightarrow H^1(F,T) \xrightarrow{i^*} H^1(F,N(T)) \xrightarrow{p^*} H^1(F,W(T))$$

Die Isomophieklasse der Tori in einer Konjugationsklasse wird bestimmt durch die zusammengesetzte Abbildung:

$$H^1(F,N(T)) \xrightarrow{p^*} H^1(F,W(T)) \longrightarrow H^1(F,\mathrm{Aut}(T))$$

(Die zweite Abbildung wird induziert durch die Einbettung $W(T) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(T)$.)
Für einen Kozykel $w = \{w_\sigma\} \in H^1(F,W(T))$ kann man noch ein Element $\delta(w) \in H^2(F,T_w)$ konstruieren, dessen Verschwinden notwendig und hinreichend dafür ist, dass $w \in \mathrm{im}(p^*)$.
Wir erhalten ferner:

$$\ker(p^*) \cong H^1(F,T)/W(T,F)$$

d.h. es werden gerade diejenigen Einbettungen identifiziert, die in der Weylgruppe konjugiert sind. (Auf Kozykelniveau gilt $w([a_\sigma]) = [a_\sigma^w \delta(w)]$, d. h. für die Konjugationsklasse von Einbettungen $w([\eta]) = [w \circ \eta]$).
Falls der Referenztorus T sogar F-split ist, ist die obige Operation der Weylgruppe trivial, da die Abbildung $N(T,F) \to W(T,F)$ dann surjektiv ist (siehe [22, p. 270]).
Ingesamt erhalten wir durch Twisten:

$$H^1(F,N(T)) \cong \bigcup_{p^*(\alpha)\in\mathrm{im}(p^*)} H^1(F,T_\alpha)/W(T_\alpha,F)$$

(wobei die Identifikation von der Wahl der Vertreter $\alpha \in H^1(F,N(T))$ abhängt.)

A.2 Kohomologie abelscher Varietäten

Kohomologie auf Quotienten

Die Kohomologie einer abelschen Varietät A läßt sich mit der Kohomologie des Tangentialraumes $\mathrm{Lie}(A)$ in Verbindung bringen. Dazu hilft folgende Beobachtung:
Sei Y eine Mannigfaltigkeit auf der eine Gruppe G diskret operiere. In diesem Fall existiert immer ein Quotient $X = Y/G$. Sei π die Projektion. Der Funktor π^* ist unter obigen Voraussetzungen exakt, da er trivialerweise auf den Halmen exakt ist. Wir haben also für jede Garbe F auf X eine Isomorphie

$$H^i(Y,\pi^*F) \cong R^i(\Gamma_Y \circ \pi^*)(F).$$

Wir können $\Gamma'_Y := \Gamma_Y \circ \pi^*$ als Funktor von der Kategorie der Garben auf X in die Kategorie der G-Moduln auffassen. Sei I der Invariantenfunktor. Es gilt dann offensichtlich $\Gamma_X \cong I \circ \Gamma'_Y$.

Wir zeigen gleich, dass Γ'_Y injektive Garben in G-azyklische Moduln überführt und erhalten daher eine Grothendieck Sprektralsequenz:

$$H^p(G, H^q(Y, \pi^* F)) \Rightarrow H^{p+q}(X, F).$$

Beweis. siehe [14]. □

Ferner überführt (unter obigen Vorraussetzungen an die G-Operation) π^* konstante Garben auf X in die entsprechenden Garben auf Y, ferner

$$\begin{array}{rcll} \Omega_T^p & \cong & \pi^*\Omega_X^p & \text{hol. Strukturgarbe (p=0) und hol. Differentialformen vom Grad p} \\ E_T^{p,q} & \cong & \pi^* E_X^{p,q} & C^\infty\text{-Differentialformen vom Grad (p,q)} \\ E_T^p & \cong & \pi^* E_X^p & C^\infty\text{-Differentialformen Grad p} \end{array}$$

In Fall einer abelschen Varietät $A = L^{-1,0}/L_{\mathbb{Z}}$ erhalten wir unter Verwendung entsprechender Resultate für die Kohomologie auf $L^{-1,0} = \mathrm{Lie}(A)$ eine degenerierende Sequenz und daher Isomorphismen:

$$\begin{array}{rcl} H^p(L_{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}) & \cong & H^p(A, \mathbb{C}_A) \\ H^p(L_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) & \cong & H^p(A, \mathbb{Z}_A) \\ H^p(L_{\mathbb{Z}}, \Omega_T^i(\mathrm{Lie}(A)) & \cong & H^p(A, \Omega_A^i) \\ H^p(L_{\mathbb{Z}}, E^{p,q}(\mathrm{Lie}(A)) & \cong & H^p(A, E_A^{p,q}) \\ H^p(L_{\mathbb{Z}}, E_T^p(\mathrm{Lie}(A)) & \cong & H^p(A, E_A^p) \end{array}$$

Kohomologie abelscher Varietäten

Sei $A \cong L^{-1,0}/L_{\mathbb{Z}}$ eine abelsche Varietät. Es gibt offensichtliche Isomorphismen

$$\begin{array}{rcll} H_{1,sing}(A, \mathbb{Z}) & \cong & L_{\mathbb{Z}} & \\ H_{1,sing}(A, \mathbb{R}) & \cong & L_{\mathbb{R}} \cong L^{-1,0} & \text{als } \mathbb{R}\text{-Vektorraum} \\ H_{1,sing}(A, \mathbb{C}) & \cong & L_{\mathbb{C}} \cong L^{-1,0} \oplus L^{0,-1} & \end{array}$$

und somit

$$\begin{array}{rcl} H^1(A, \mathbb{Z}_A) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \\ H^1(A, \mathbb{R}_A) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\ H^1(A, \mathbb{C}_A) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}) \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^{-1,0}, \mathbb{C}) \oplus \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^{-1,0}, \mathbb{C})} \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^{-1,0}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^{0,-1}, \mathbb{C}) \\ & =: & L^{1,0} \oplus L^{0,1} \end{array}$$

Diese Isomorphismen identifizieren sich mit denen, die man aus dem Vergleich mit der Gruppenkohomologie von $L_{\mathbb{Z}}$ erhält.
Da die höheren Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ verschwinden, kann man die höheren Kohomologiegruppen von A mit Hilfe der Künneth-Formel berechnen und erhält:

$$\begin{aligned}
H^n(A, \mathbb{Z}_A) &\cong \Lambda^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \\
H^n(A, \mathbb{R}_A) &\cong \Lambda^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \\
H^n(A, \mathbb{C}_A) &\cong \Lambda^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}, \mathbb{C}) \\
&\cong \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p Hom_{\mathbb{C}}(L^{-1,0}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q \overline{Hom_{\mathbb{C}}(L^{-1,0}, \mathbb{C})} \\
&\cong \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p L^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q L^{0,1}.
\end{aligned}$$

Die Mannigfaltigkeit A ist kählersch, da jede hermitesche Metrik auf $L^{-1,0}$ auf A absteigt und die zugehörige invariante (1,1)-Form automatisch geschlossen ist. Die resultierende Hodge-Zerlegung ist für alle i gerade die obige Zerlegung. Daraus erhalten man zusätzlich:

$$L^{p,q} = H^p(A, \Omega_A^q) \cong \Lambda^p L^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q L^{0,1}$$

Vertreter der DeRham-Kohomologieklassen erhält man für die Gruppen $H^p(A, \Omega_A^q)$ bzw. für $H^n(A, \mathbb{C}_A)$ durch die zum entsprechenden Kotangentialvektor an der 0 (rechte Seite der obigen Isomorphismen) gehörende, durch Translation entstehende, invariante Form.

Literaturverzeichnis

[1] C.-L. Chai. *Siegel Moduli Shemes and Their Compactification over* $\mathbb{C}$, pages 231–252. Arithmetric Geometry. Springer-Verlag, New York, 1986.

[2] P. Deligne. Traveaux de Shimura. *Séminaire Bourbaki*, 23e année, 1970/71, n° 389:123–165, 1971.

[3] P. Deligne. Variétés de Shimura: Interprétation Modulaire, et Techniques de Construction de Modèles Canoniques. *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 33, part 2:247–290, 1979.

[4] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, and K. Shih. *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1980.

[5] P. Griffiths and W. Schmid. *Recent developments in Hodge Theory: a discussion of techniques and results*, pages 31–128. Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli. Oxford University Press, 1975. Papers presentes at the Bombay Colloquium, 1973.

[6] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[7] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York San Francisco London, 1978.

[8] T. Kubota. On the field extension by complex multiplication. *Trans. AMS 118 No. 6*, pages 113–122, 1965.

[9] S. Lang. *Complex Multiplication*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] J. S. Milne. *Abelian Varieties*, pages 103–150. Arithmetric Geometry. Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] J. S. Milne. Abelian varieties with complex multiplication (for pedestrians). http://www.jmilne.org/, 1998.

[12] J. S. Milne. Canonical models of Shimura curves. http://www.jmilne.org/, 2003.

[13] J. S. Milne. Introduction to Shimura Varieties. http://www.jmilne.org/, 2004.

[14] D. Mumford. *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1965.

[15] D. Mumford, J. Fogarty, and E. Kirwan. *Geometric Invariant Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.

[16] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[17] V. Platonov and A. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[18] K. A. Ribet. Division Fields of Abelian Varieties with Complex Multiplication. *Soc. Math. de France, 2e série, Memoire n° 2*, pages 75–94, 1980.

[19] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géometrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, pages 1–42, 1956.

[20] J.-P. Serre. *Complex Multiplication*, pages 292–296. Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf. Brighton 1965). Thompson, Washington, D.C., 1967.

[21] G. Shimura. *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions.* Princeton University Press, 1998.

[22] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups, Second Edition.* Birkhäuser, Boston, 1998.

[23] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* Cambridge University Press, 2002.