

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Orthogonales Komplement.** Sei U eine Teilmenge von \mathbb{R}^n .

Beweisen Sie, dass

$$U^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist und dass $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$ gilt.

2. **Orthogonale Projektion.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $P \circ P = P$ so, dass $\text{Kern}(P) = U^\perp$ und $\text{Bild}(P) = U$. Geben Sie eine explizite Formel für P an.
(b) P ist eindeutig bestimmt durch diese drei Eigenschaften.
(c) Es gilt $\dim U + \dim U^\perp = n$.

3. **Orthogonale Abbildungen der Ebene.** Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt invariant lassen.

4. **Binärer Hamming-Code.** Stellen Sie für den binären $[n, k, d] = [15, 11, 3]$ -Hamming-Code die Erzeugermatrix G und die Prüfmatrix H in der Form

$$G = (\text{Id}_k \mid A) \quad H = (-A^T \mid \text{Id}_{n-k})$$

auf. Kodieren Sie den Vektor

$$(1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1).$$

Fälschen Sie das Ergebnis ab, indem Sie ein beliebiges Bit verändern. Berechnen Sie anschließend das Syndrom und überprüfen Sie, dass es zum abgeänderten Bit korrespondiert (d.h. in der entsprechenden Spalte der Matrix H auftaucht).

Bitte wenden!

5. Bonusaufgabe: Rätsel. (4 Bonuspunkte)

In einem Raum befindet sich ein gewöhnliches Schachbrett mit 8 mal 8 Feldern und dazu 64 identische Münzen jeweils mit einer Seite "Kopf" und einer Seite "Zahl". Zwei Gefangene befinden sich in der Gewalt eines etwas verschrobenen Gefängniswärters, der entschieden hat, mit ihnen ein Spiel um ihre Freiheit zu spielen. Das Spiel hat die folgenden Regeln:

Der Wärter nimmt einen der beiden Gefangenen (nennen wir ihn den "ersten" Gefangenen) mit in dem erwähnten Raum, während der zweite draussen wartet. Im Raum legt der Wärter nach Belieben (d.h. zufällig) jeweils genau eine Münze auf jedes Feld des Schachbrettes, so dass sie entweder Kopf oder Zahl zeigt. Danach wird er ein Feld des Schachbrettes auswählen und dem ersten Gefangenen mitteilen, dass dies das "magische" Feld sei. Der erste Gefangene muss anschliessend genau eine Münze im Raum umdrehen und dann den Raum verlassen. Nachdem er den Raum verlassen hat, darf der zweite hineingehen¹. Der Wärter fragt anschliessend den zweiten Gefangenen, welches das magische Feld ist. Falls er dies korrekt benennen kann, werden beide Gefangenen freigelassen.

Diese Regeln werden beiden Gefangenen vor dem Spiel mitgeteilt. Sie können anschliessend diskutieren und sich auf eine Strategie einigen. Die Frage ist nun natürlich: Welcher Strategie sollten Sie folgen?

Abgabe bis Fr 26.6.2015, 10:00 in die Kästen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Gebäude 51.

¹ohne die Möglichkeit zu haben, mit dem ersten Gefangenen zu kommunizieren