**Dr. Juan Diego Caycedo — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2015**

Übungsblatt 7

---

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Gleichungssysteme.** Bestimmen Sie (mit dem Gaussverfahren) alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Invertieren.** Invertieren Sie die folgende Matrix (mit dem Gaussverfahren):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Eine Dimensionsformel.** Seien $V$ und $W$ Untervektorräume eines $k$-Vektorraumes $U$.

   (a) Beweisen Sie, dass $V + W := \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$ und $V \cap W$ Untervektorräume von $U$ sind.

   (b) Beweisen Sie die Formel

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

   *Hinweis: Erweitere eine Basis $z_1, \ldots, z_n$ von $V \cap W$ zu einer Basis $z_1, \ldots, z_n, v_1, \ldots, v_k$ von $V$ und zu einer Basis $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_l$ von $W$. Beweise dann, dass $z_1, \ldots, z_n, v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$ eine Basis von $V + W$ ist.*

4. **Zassenhaus-Algorithmus (6 Punkte).** Sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum, welcher durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$$

   aufgespannt wird. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der Raum, welcher durch die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, w_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T, w_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}^T, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

   aufgespannt wird.

   Bestimmen Sie Basen der Untervektorräume:

$$\text{(a) } V, \quad \text{(b) } W, \quad \text{(c) } V + W, \quad \text{(d) } V \cap W.$$

*Bitte wenden.*

*Hinweis zu Aufgabe 4 (Zassenhaus-Algorithmus):*

*Bilden Sie die Matrix der folgenden Form:*

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} & v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} \\ w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{l,1} & \cdots & w_{l,n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

*Nach Reduzierung mit dem Gaussverfahren (ohne Spaltenvertauschungen) hat die Matrix die Gestalt:*

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & g_{1,1} & \ldots & g_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{r,1} & \ldots & g_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

*Die Vektoren* $f_1, \ldots, f_m$ *bilden dann eine Basis von* $V + W$ *und die Vektoren* $g_1, \ldots, g_r$ *bilden eine Basis von* $V \cap W$. *Diskutieren Sie in den Übungen, warum.*

*Abgabe bis Fr 12.6.2015, 10:00 in die Kästen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Gebäude 51.*