
Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$.** Beschreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geometrisch, welche durch die folgende Matrix (bzgl. der Standardbasis) gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Welche Matrix beschreibt dieselbe Abbildung bzgl. der Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

2. **Kern und Bild.** Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

3. **Eigenwerte und Eigenvektoren.**

   (a) Bestimmen Sie durch geometrische Überlegung, unter welchen Bedingungen an $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende reelle Matrix **reelle** Eigenwerte hat:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

   Listen Sie die Fälle auf, und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren an.

   (b) Die folgende Matrix hat Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Bestimmen Sie diese.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

4. **Zassenhaus-Algorithmus.** Sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum, welcher durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$$

aufgespannt wird. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der Raum, welcher durch die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T, w_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^T, w_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}^T, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

aufgespannt wird.

Bestimmen Sie Basen der Untervektorräume:

(a) V, (b) W, (c) $V + W$, (d) $V \cap W$.

Hinweis: Sei

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} \end{pmatrix}$$

die Matrix, deren Zeilen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_k$ sind. Bringen Sie diese Matrix mit dem Gaussverfahren (ohne Spaltenvertauschungen) in Zeilenstufenform, z.B.:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die **von 0 verschiedenen** *Zeilen bilden dann eine Basis des von $v_1, \dots, v_k$ aufgespannten Raumes. Indem Sie die Vektoren $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ als Zeilen unteranderschreiben, bekommen Sie auf diese Weise eine Basis von $V + W$.*

Hinweis zu (d) — Zassenhaus-Algorithmus: Bilden Sie die Matrix der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} & v_{k,1} & \cdots & v_{k,n} \\ w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{l,1} & \cdots & w_{l,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Reduzierung mit dem Gaussverfahren (ohne Spaltenvertauschungen) hat die Matrix die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & g_{1,1} & \dots & g_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{r,1} & \dots & g_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $f_1, \dots, f_m$ bilden dann eine Basis von $V + W$ und die Vektoren $g_1, \dots, g_r$ bilden eine Basis von $V \cap W$. Diskutieren Sie in den Übungen, warum.

Abgabe am 4.6.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung