Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Klausurbeispiel

In der Hauptklausur werden *nur ca. 10 Aufgaben* gestellt. Sie haben dafür 2 Stunden Zeit. 50 % reichen zum Bestehen.

1. Berechnen Sie den g.g.T. der Zahlen 56 und 91 und finden Sie eine Darstellung der Form
$$\mathrm{ggT}(56, 91) = m \cdot 56 + n \cdot 91$$
mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $\overline{7}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

3. Betrachten Sie die Spiegelung $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an der Ebene im $\mathbb{R}^3$, welche durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie die Matrix für s bzgl. der Standardbasis.

4. Betrachten Sie die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ welche durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben wird. Bestimmen Sie die Matrix dieser Abbildung bzgl. der Basis
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Berechnen Sie
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Berechnen Sie eine Basis des Untervektorraumes (Ebene) des $\mathbb{R}^3$
$$\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y - z = 0 \}.$$

7. Berechnen Sie eine Basis des von den Vektoren
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
aufgespannten Untervektorraumes des $\mathbb{R}^4$.

8. Bestimmen Sie die Gruppentafel für $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$.

9. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi \in S_9$

$$\varphi : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 9\}$$

welche durch

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 7 & \varphi(2) = 1 & \varphi(3) = 2 \\ \varphi(4) = 4 & \varphi(5) = 9 & \varphi(6) = 3 \\ \varphi(7) = 6 & \varphi(8) = 8 & \varphi(9) = 5 \end{array}$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Ordnung von φ in der Gruppe S_9.

10. Die Matrizen

$$G = \left(\mathrm{id}_{11}\,|A\right) \text{ und } H = \left(-A^T|\,\mathrm{id}_4\right)$$

beschreiben den binären [15,11,3]-Hamming-Code. Dabei ist A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Decodieren Sie den Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

nach Fehlerkorrektur.

11. Berechnen Sie die Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 6 \cdot x \cdot y + 90 \cdot x - 3 \cdot y$$

und bestimmen Sie, ob es sich jeweils um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

12. Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung des Winkels[1] φ der Funktion

$$f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$$

im Punkt $x = 0, y = 0$.

Musterlösungen werden in Kürze online gestellt.

[1] Der Winkel ist relativ zur x-Achse gemessen. $0°$ bedeutet also: in Richtung der x-Achse, $90°$: in Richtung der y-Achse, u.s.w.