Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 4

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe ergibt 4 Punkte. **16 Punkte zählen als 100%**.

1. **Die Drehgruppe des Würfels.** Beweisen Sie, dass die Gruppe S_4 zur Drehgruppe G des dreidimensionalen Würfels isomorph ist, und zwar wie folgt:

   (a) G permutiert die 4 Diagonalen des Würfels. Begründen Sie (ohne zu rechnen!), dass dies (durch Nummerieren der Diagonalen) einen Homomorphismus

   $$\rho : G \to S_4$$

   ergibt.

   (b) Zeigen Sie, dass ρ injektiv ist.

   (c) Zeigen Sie, dass G und S_4 gleich viele Elemente enthalten.

   (d) Folgern Sie, dass ρ ein Isomorphismus ist.

2. **Beispiele für Kern und Bild.** Die Drehgruppe des Würfels G aus Aufgabe 1 permutiert auch die 3 Achsen des $\mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass dies einen Homomorphismus

   $$\tau : G \to S_3$$

   definiert. Schliessen Sie, dass es einen nicht-trivialen Homomorphismus

   $$\widetilde{\tau} : S_4 \to S_3$$

   gibt und bestimmen Sie dessen Kern und Bild.

3. **Zum Satz von Cayley.** Konstruieren Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus

   $$\alpha : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

   und schliessen Sie, dass jede endliche Gruppe eine Untergruppe einer geeigneten Matrizengruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist.

   Hinweis: Die Bildmatrizen haben als Einträge nur Nullen und Einsen und es kommen genau n Einsen vor.

Bitte wenden!

4. **Zyklische Gruppen.** Seien $M > 0$ und $N > 0$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, also so dass $\mathrm{ggT}(M, N) = 1$. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus:

$$(\mathbb{Z}/(MN)\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Zur Erinnerung: Für zwei Gruppen G und H bezeichnet $G \times H$ die Menge der Paare (g, h), wobei $g \in G$ und $h \in H$, mit der Verknüpfung:

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2).$$

In dieser Aufgabe ist die Verknüpfung auf der rechten Seite natürlich die Operation „+".

Hinweis: Behandeln Sie zunächst als Beispiel den Fall $N = 2$ und $M = 3$. Um im allgemeinen Fall zu beweisen, dass Ihr Homomorphismus bijektiv ist, konstruieren Sie eine Umkehrabbildung, indem Sie eine Darstellung $1 = aN + bM$ verwenden, die der euklidische Algorithmus liefert.

5. **Restklassenringe.** Sei $N > 0$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo N, die wir in der Aufgabe 2 auf dem letzten Blatt eingeführt haben, bzgl. der Operationen „+" und „·" (siehe Blatt 3, Aufgabe 2 c) einen Ring bildet.

Hinweis: Da wir schon wissen (Blatt 3, Aufgabe 2 d), dass $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, müssen Sie hierzu nur beweisen, dass

(a) *auch die Operation „·" assoziativ ist,*

(b) *ein Einselement existiert und*

(c) *das Distributivgesetz gilt.*

Nutzen Sie aus, dass diese Eigenschaften in $\mathbb{Z}$ erfüllt sind.

Abgabe am 30.5.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung