Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 1

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Der abstrakte Funktionsbegriff.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion (Abbildung) zwischen beliebigen Mengen. Grundlegend sind die folgenden Definitionen:

   - f heisst **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, dass $x_1 = x_2$. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat höchstens ein Urbild unter f.
   - f heisst **surjektiv**, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat mindestens ein Urbild unter f.
   - f heisst **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat genau ein Urbild unter f.

   (a) Geben Sie jeweils eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, die 1. injektiv aber nicht surjektiv ist, 2. surjektiv aber nicht injektiv ist, 3. bijektiv aber nicht die Identität ist.

   (b) Sei nun $f : X \to X$ eine Funktion einer **endlichen** Menge in sich. Begründen Sie mit Worten, dass folgendes gilt:

   $$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}.$$

   Mit anderen Worten: Alle drei Begriffe sind in diesem Fall gleichbedeutend.

   (c) Beweisen Sie die Aussage in b) formal mittels vollständiger Indukion nach der Anzahl $\#X$ der Elemente von X:
   Hier der Anfang für die Richtung „injektiv $\Rightarrow$ surjektiv“: Als Induktionsvoraussetzung dient der Fall $\#X = 1$. Begründe, dass die Aussage in diesem Fall trivial ist. Dann nehme an, dass die Aussage für alle Mengen X mit $\#X \leq n$ bewiesen ist. Zu zeigen ist (Induktionsschritt), dass sie für Mengen X mit $\#X = n + 1$ auch gilt. Sei $x \in X$ ein beliebiges Element. Schränke f zu einer Abbildung $X \setminus \{x\} \to X \setminus \{f(x)\}$ ein. Warum ist dies möglich? Wende dann die Induktionsvoraussetzung an (also die Richtigkeit der Aussage für Mengen mit $\leq n$ Elementen)...

2. **Zweistellige Operationen.** Betrachte eine Menge X mit 6 Elementen. Wieviele verschiedene (zweistellige) Operationen, d.h. Funktionen $\circ : X \times X \to X$ gibt es?

   Wir werden später sehen, dass es *bis auf Isomorphie*, also bis auf ein Umbenennen der Elemente von X genau zwei verschiedene Gruppen mit 6 Elementen gibt. Finden Sie Besipiele dieser zwei Gruppenstrukturen und geben Sie die Operation tabellarisch an (Verknüpfungstabelle). Folgern Sie, wieviele der obigen Operationen $\circ : X \times X \to X$ gültige Gruppenstrukturen auf X definieren.

   Hinweis zur letzten Frage: Wieviele Umbenennungen, d.h. Bijektionen $X \to X$ gibt es?

Bitte wenden!

3. **Programmieraufgabe.** In einer Programmiersprache kann man eine zweistellige Operation auf einer endlichen Menge als ein zweidimensionales Array repräsentieren (z.B. in C++[1]):

```
const int nmax=100;

struct gruppe
{
  int op[nmax][nmax];
  int n;
};

gruppe g;
```

Schreiben Sie eine Funktion

```
bool testgruppe(const gruppe &g);
```

welche testet, ob die gegebene Verknüpfung $g.op$ (auf einer Menge mit $g.n$ Elementen) eine Gruppe definiert.

Für den Fall $n = 6$, schreiben Sie für die beiden Isomorphieklassen von Gruppen aus Aufgabe 2 jeweils ein Hauptprogramm, welche die Struktur g mit der entsprechenden Gruppe initialisiert (durch Eingeben der Tabelle oder durch eine geschickte Schleife) und dann mit der Prozedur „testgruppe“ verifiziert.

Abgabe am 9.5.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung

[1] Sie dürfen eine beliebige Programmiersprache Ihrer Wahl verwenden.