$(\mathbb{Q}, <)$ Addition und Multiplikation und andere Strukturen wird vergessen!

keine Endpunkte, d.h. kein Maximum und kein Minimum

„dichte Ordnung": Zwischen je zwei Elemente gibt es ein drittes, (✗)

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar („So viele wie es natürliche Zahlen gibt")

Satz von Cantor: Falls $(A, \sqsubset)$ eine abzählbare, dichte totale Ordnung ist ohne Endpunkte, dann gibt es eine Ordnungserhaltende Bijektion

$$\beta: \mathbb{Q} \to A, \text{ d.h. } q_1 < q_2 \Leftrightarrow \beta(q_1) \sqsubset \beta(q_2)$$

---

es gibt sehr viele Automorphismen von $(\mathbb{Q}, <)$, d.h. Bijektionen

$$\alpha: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \text{ mit } q_1 < q_2 \Leftrightarrow \alpha(q_1) < \alpha(q_2)$$

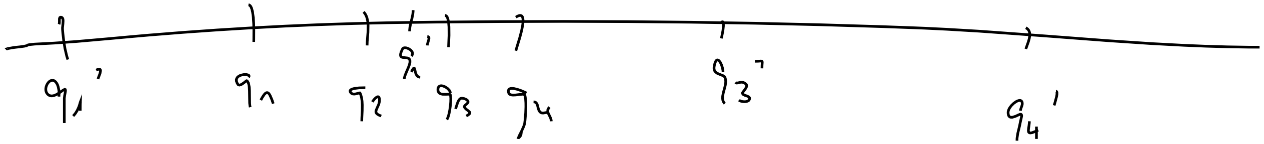
z.B. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ operiert transitiv auf $\mathbb{Q}$, d.h.

für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ mit $\alpha(q_1) = q_2$

$(\mathbb{N}, <)$: id ist der einzige Automorphismus!

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ ist sogar „hoch transitiv"

gegeben $q_1, \dots, q_n$ mit $q_1 < \dots < q_n$
$q_1', \dots, q_n'$ mit $q_1' < \dots < q_n'$
dann ex. $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ mit $\alpha(q_1) = q_1', \dots, \alpha(q_n) = q_n'$



man kann α mit $+$ und $\cdot$ tatsächlich beschreiben!

Bem: hoch transitive Permutationsgruppen sind selten und daher für die Gruppentheorie interessant!

$(\mathbb{Q}, <)$ ist eine homogene Struktur

allgemein: M ist homogene Struktur, falls A, B endlich erzeugte Unterstrukturen und $\alpha': A \to B$ Isomorphismus,

dann existiert $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$, der α' ~~f~~ fortsetzt

im Beispiel: $A = (\{q_1, \dots, q_n\}, <)$, $B = (\{q_1', \dots, q_n'\}, <)$ $\quad \alpha': q_i \mapsto q_i'$

In $(\mathbb{Q},<)$ kann man Relationen definieren, z.B.

$R(a,b,c) :\Leftrightarrow a<b$ und $b<c$

$<$ kann man aus R zurückgewinnen:

$a<b :\Leftrightarrow$ es gibt ein x mit $R(a,x,b)$

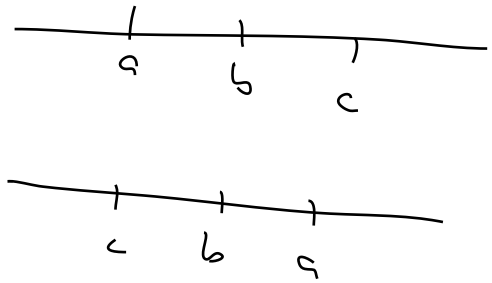
$a<x<b$

„R und $<$ sind inter-definierbar"

$Z(a,b,c) :\Leftrightarrow (a<b$ und $b<c)$ oder $(a>b$ und $b>c)$

„b liegt zwischen a und b"

$Z(a,b,c)$ gilt



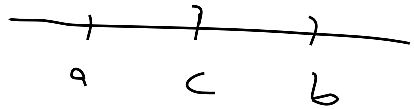
aus Z kann man $<$ nicht zurückgewinnen, denn betrachte

$(\mathbb{Q},<^{-1})$ mit $q_1 <^{-1} q_2 \Leftrightarrow q_1 > q_2$

$(\mathbb{Q},<) \cong (\mathbb{Q},<^{-1})$

definieren das gleiche Z

$Z(a,b,c)$ gilt nicht

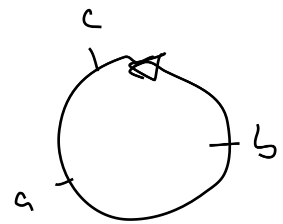


$Z(a,c,b)$ gilt

„Z ist aus $<$ definierbar, aber nicht umgekehrt"

es gibt bis auf Interdefinierbarkeit nur 5 Möglichkeiten (Cameron)
(„Redukte von $(\mathbb{Q},<)$")

- $<$ Ordnung
- Z Zwischenrelation
- zyklische Ordnung $\xrightarrow{\mathbb{Q}}$
- Trennrelation
- keine Struktur

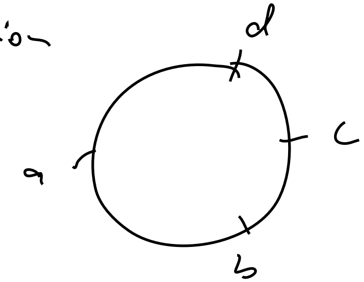


$$S(a,b) :\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} a<b & \text{oder} \\ a=b & \text{oder} \\ a>b & \end{array}$$

zyklische Ordnung

$$C(a,b,c) :\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} a<b<c & \text{oder} \\ c<a<b & \text{oder} \\ b<c<a & \end{array}$$

Trennrelation



$T(a,b,c,d)$

$:\Longleftrightarrow$ die Intervalle (a,b) und (c,d) schneiden sich nicht

$\Longleftrightarrow$ a und c liegen auf verschiedenen Seiten bzgl. b und d

$$\begin{array}{c} \mathrm{Sym}(\mathbb{Q}) \\ \vee\!| \\ \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, R) \\ \vee\!| \\ \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <) \end{array}$$

mit $<$ definierbare Relation R

R ist genau dann interdefinierbar mit R' wenn $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},R) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},R')$

Solche Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},R)$ haben eine zusätzliche Eigenschaft: abgeschlossen in $\mathrm{Sym}(\mathbb{Q})$

die 5 Redukte von $(\mathbb{Q},<)$ entsprechen den 5 abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{Sym}(\mathbb{Q})$, die $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ enthalten

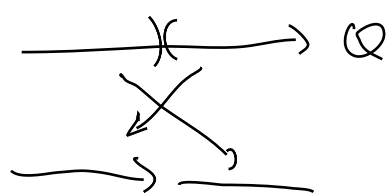
$\mathrm{Sym}(\mathbb{Q}) \mathrel{\hat{=}}$ keine Struktur

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sym}(\mathbb{Q}) \arrow[d, phantom, "\vee\!|"] & \\
 & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},T) \arrow[dl, phantom, "\leq"] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & \\
\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},C) \arrow[dr, phantom, "\geq"] & & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},Z) \arrow[dl, phantom, "\leq"] \\
 & \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<) &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},Z) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ + Antiautomorphismen, d.h. Bijektionen $\beta: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$q_1 < q_2 \iff \beta(q_1) > \beta(q_2)$$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},C)$

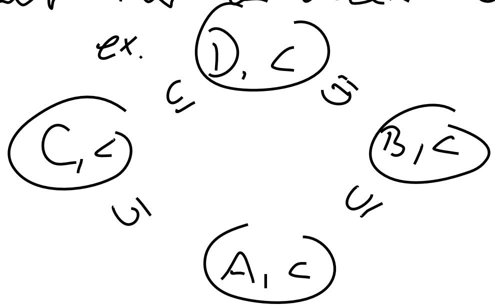


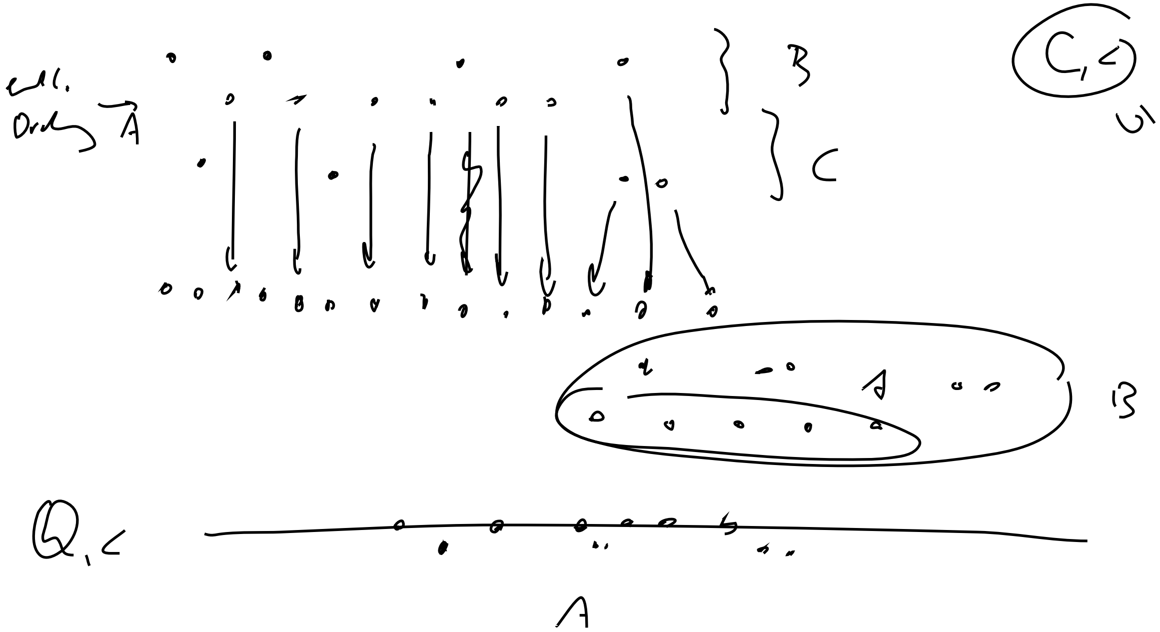
Vermutung von Simon Thomas (ca. 1991)

M homogene Struktur in endlicher Sprache,

dann gibt es nur endlich viele Redukte

$(\mathbb{Q},<)$: Amalgam bzw. Grenzwert aller endlichen Ordnungen



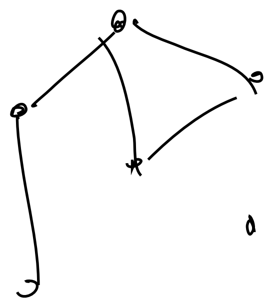


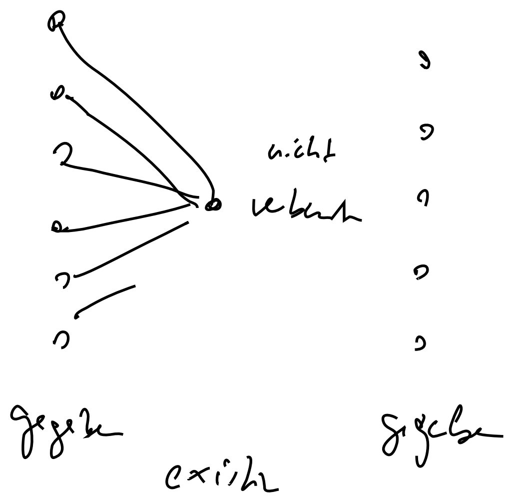
B findet man in $\mathbb{Q}$ wieder

dieses Verfahren kann man mit vielen Klassen endlicher Strukturen machen,

z.B mit Graphen

$\rightsquigarrow$ Zufallsgraph   Rado-Graph





Simon Thomas: Der Zufallsgraph hat genau 5 Redukte

$(\mathbb{Q}, <, 0)$

(Junker, Ziegler 2008) $(\mathbb{Q}, <, 0)$ hat 116 Redukte