Höhere Ableitungen

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar

partielle Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ in Richtung der e_i-Achse

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right) \text{ ist Funktion } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

bzw ($m=1$): für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} =: g \qquad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

(evtl. je nach Autor auch umgedrehte Reihenfolge)

entsprechend $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$

Schreibweise: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

(analog für noch höhere Ableitungen)

Satz von Schwarz

(Spezialfall:) Wenn f zweimal differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

(allgemein:) Wenn f k-mal differenzierbar ist, dann kommt es bei einer k-fachen partiellen Ableitung nicht auf die Reihenfolge der Ableitungsrichtungen an

---

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Menge der linearen Abbildungen

$$f': \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \underset{\text{Basiswahl (+ Ordnung)}}{\cong} \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

$\rightsquigarrow$ hier sieht f' aus wie

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots\dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right)^T$$

$f'': \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$: Jacobi von $f''(x)$ besteht aus allen $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$

$\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Standardbasis e_{ij}

mit Matrix $E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \vdots & & 0 \\ & \cdots & 1 & \cdots & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ gilt

d.h. $e_{ij} : e_k \mapsto 0 \quad k \neq j$

$\qquad\quad e_j \mapsto e_i$

Eine Identifikation von $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ funktioniert z.B. dadurch, dass man die Standardbasis $(e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ in eine Reihenfolge bringt

z.B. $(e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{mn})$

$$g \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x) \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

$$g(x)(y) \in \mathbb{R}^m$$

wird aufgefasst als

$$\tilde{g}(x,y)$$

$$\tilde{g} \in \operatorname{Bilin}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

„bilineare Abbildungen", d.h.

$$g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$$

$$g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$$

analog für Skalar

insbesondere $g(rx, ry) = r^2 \cdot g(x,y)$

Spezialfall $m=1$: $\quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

$$f'': \mathbb{R}^n \longrightarrow \operatorname{Bilin}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto f''(x)$$

„Hesse-Form"

(n×n)-Matrix!

zugehörige Matrix (Jacobi-Matrix von f' an der Stelle x)

heißt Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz:

Die Hesse-Matrix H ist symmetrisch, d.h. $H^T = H$

$$(A \cdot v)^T = v^T \cdot A^T$$

Die Hesse-Matrix beschreibt durch
$$(x,y) \longmapsto x^T \cdot H \cdot y$$
die zugehörige bilineare Abbildung

$x, y \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren

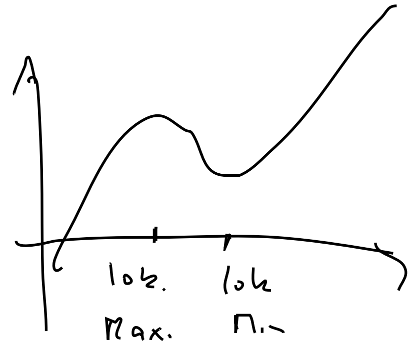
$$(\cdots)\begin{pmatrix} \cdots \\ \vdots \quad \vdots \\ \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

lokale Extrema $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: $x \in \mathbb{R}^n$ ist lokales Maximum (bzw. Minimum) von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt,

so dass $f(x) > f(y)$ für alle $y \in D_\varepsilon(x)$, $y \neq x$

($bzw.$ $f(x) < f(y)$)



Satz: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar

Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ lokales Maximum bzw. lokales Minimum ist,

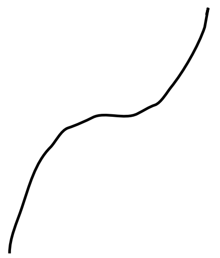
dann ist $f'(x) = 0$ (d.h. alle $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$)

Umkehrung gilt nicht!

Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f'(x) = 0$ heißen kritische Punkte.

Kritische Punkte, die kein lokales Maximum oder Minimum sind, heißen Sattelpunkte.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

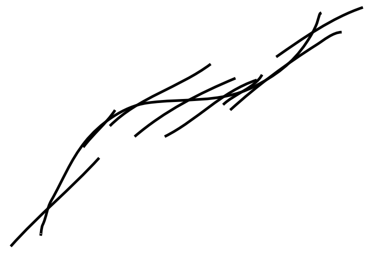


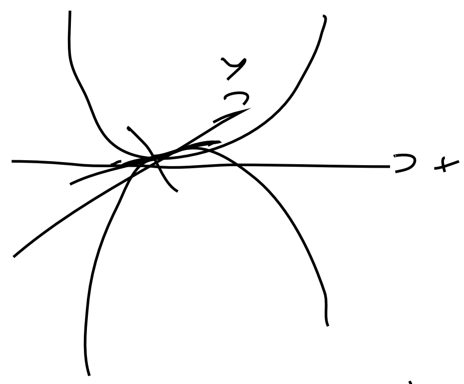
x^3

konstant

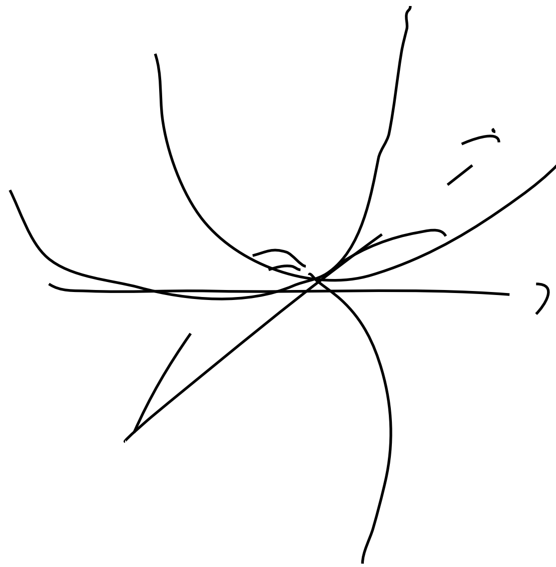
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$(x,y) \mapsto x^3$





$x^2 - y^2$



Satz: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
zweimal differenzierbar
$x \in \mathbb{R}^n$ kritischer Punkt:

- Falls die Hesse-Matrix im Punkt x positiv definit ist, dann hat f in x ein lokales Minimum.
- Falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, dann lokales Maximum.
- Falls die Hesse-Matrix indefinit ist, dann Sattelpunkt

Achtung: nicht positiv definit und nicht negativ definit
heißt noch nicht indefinit!

Hesse-Matrix an der Stelle x

kritischer Punkt

H_x ist positiv definit, falls $y^T \cdot H \cdot y > 0$ für alle $y \neq x$

H_x negativ $<$

indefinit, falls sowohl negative als auch positive Werte vorkommen

Hurwitz-Kriterium

symmetrische quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, falls

$\det(a_{11}) > 0$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$

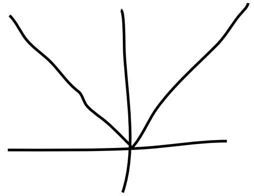
$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix} > 0$

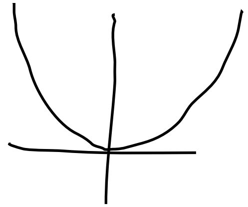
$\vdots$

$\det A > 0$

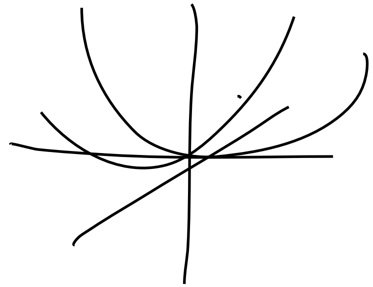
negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$





$f'(x,y) = (2x, 2y)$, kritischer Punkt ist $(0,0)$



Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

Hurwitz: $\boxed{2}$ $\quad \boxed{\begin{matrix}2&0\\0&2\end{matrix}}$

det $\quad 2 \quad 4$

$$(a,b)\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (a,b)\cdot\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}$$

$$= 2a^2+2b^2 = 2(a^2+b^2) > 0$$

für $(a,b)\neq(0,0)$

positiv definit, also lok. Minimum!

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2-y^2$

$f'(x,y) = (2x, -2y)$, kritischer Punkt ist $(0,0)$

Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$$(a,b)\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 2a^2-2b^2$$

für $(1,0)$ Ergebnis $2>0$

für $(0,1)$ Ergebnis $-2<0$

also indefinit!

Sattelpunkt

Ergänzung: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x \in \mathbb{R}^2$ fest

Dann gibt es Basis, bzgl. der die Hesse-Matrix im Punkt x Diagonalgestalt hat $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ λ_i sind Eigenwerte der Matrix

Hurwitz-Kriterium: positiv definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

negativ definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$

indefinit $\Leftrightarrow$ ein $\lambda_i > 0$, ein $\lambda_i < 0$

Bestimme Eigenwerte der symmetrischen 2x2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$

Eigenwert λ existiert genau dann, wenn $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \neq 0$,

d.h. $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$$ quadratische Gleichung in λ

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{a^2+c^2-2ac+4b^2}}{2}$$