Berechnung von Determinanten $\qquad A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$

- Formel von Lagrange
$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

- Entwicklungssatz

nach i-ter Zeile
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Matrix, die aus A entsteht, indem man die i-te Zeile und j-te Spalte entfernt

Bsp: $i=2$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

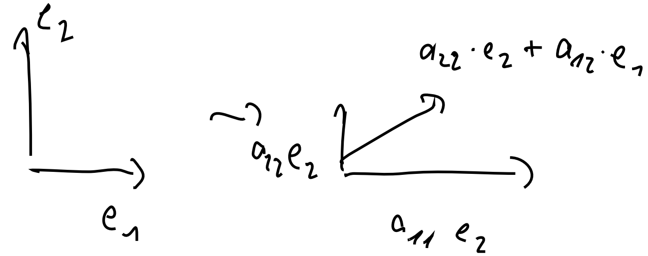
nach j-te Spalte
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$*$ irgendwelche Einträge

- **Dreiecksmatrizen**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

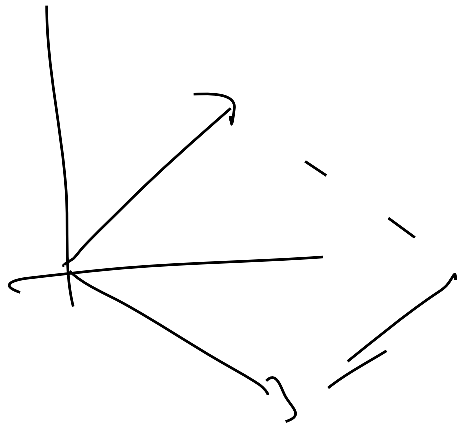


Berechnungsverfahren ähnlich zum Gauß-Verfahren

- Vertauschung von 2 Spalten bzw. 2 Zeilen ändert das Vorzeichen
- Multiplikation einer Zeile bzw Spalte mit $k \in K$ ändert die Determinante um das k-fache
- Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen bzw einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht
- mit Hilfe dieser Schritte bringt man die Matrix auf Dreiecksgestalt.

- Kästchensatz

$$\begin{array}{c|cc|} & k & l \\ \hline k & A & * \\ l & 0 & B \end{array} \quad \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$



$\underline{n=1}$: $\quad |a_{11}| = \det(a_{11}) = a_{11}$

$\underline{n=2}$: $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

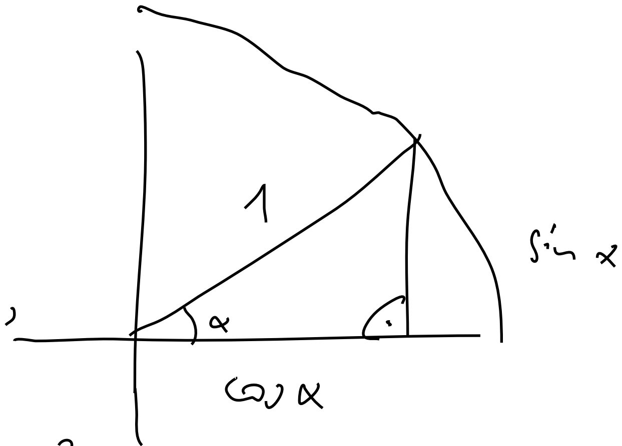
$\underline{n=3}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21}\, a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

$\underline{n=4}$; kein kurze Merkformel ; Lagrange : Summe von $4! = 24$ Vierprodukten

Bsp: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Pythagoras



$$SL_n(K) = SL(n,K) = \{ A \in Mat_{n\times n}(K) \mid \det(A) = 1 \}$$

$\det: GL_n(K) \longrightarrow (K\setminus\{0\}, \cdot)$ ist Gruppenhomomorphismus mit Kern $SL_n(K)$

<u>Cramersche Regel</u> $\quad A \cdot \bar{x} = \bar{b} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Lineares Gleichungssystem, A soll invertierbar sein ($\operatorname{rang}(A) = n$)

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Matrix A, i-te Spalte durch $\bar{b}$ ersetzt

<u>Inverse</u> $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \right)^T_{1 \le i,j \le n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

für praktische Belange sind diese Inversenberechnung und die Cramersche Regel ungeeignet!

(Standard-) Skalarprodukt im K^n

(misst Längen und Winkel)

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : K^n \times K^n \longrightarrow K$$

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle := (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

$\boxed{\text{ab sofort } \quad K = \mathbb{R}}$

Eigenschaften: (a) Positivität $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$

$\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$

(b) Symmetrie $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(c) Linearität in den beiden Argumenten:

$$\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{w}' \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w}' \rangle$$

$$\langle \bar{v}, r \cdot \bar{w} \rangle = r \cdot \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$$

(definierende Eigenschaften von reellen Skalarprodukten)

und analog für das andere Argument!

Längen

$$\|\bar{v}\| := \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

ist die Länge (bzw. euklidische Norm) des Vektors $\bar{v}$

(Pythagoras!)

$v_1^2 + v_2^2 = (\text{Länge von } v)^2$

$d(\bar{v}, \bar{w}) := \|\bar{v} - \bar{w}\|$ ist der „Abstand“ von $\bar{v}$ und $\bar{w}$ („Metrik“)

Eigenschaften:

(definierende Eigenschaften von Normen bzw Metriken über $\mathbb{R}$)

$\|\bar{v}\| \geq 0$

$\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = 0$

$\|r \cdot \bar{v}\| = |r| \cdot \|v\|$

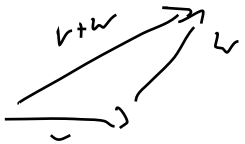
$d(\bar{v}, \bar{w}) \geq 0$

$d(\bar{v}, \bar{w}) = 0 \iff \bar{v} = \bar{w}$

$d(\bar{v}, \bar{w}) = d(\bar{w}, \bar{v})$

Dreiecksungleichungen

$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$



$d(\bar{v}, \bar{w}) \leq d(\bar{v}, \bar{u}) + d(\bar{u}, \bar{w})$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \bar v, \bar w\rangle| \leq \|\bar v\| \cdot \|\bar w\|$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i^2$$

also $$\left| \frac{\langle \bar v, \bar w\rangle}{\|\bar v\| \cdot \|\bar w\|} \right| \leq 1$$

$$\|\bar v + \bar w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

$$= \|\bar v\|^2 + \|\bar w\|^2 + 2 \langle \bar v, \bar w\rangle$$

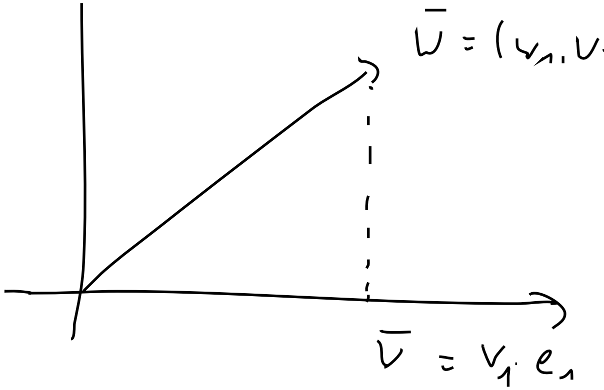
also (verallgemeinerter Pythagoras) $\|\bar v + \bar w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Longleftrightarrow \langle \bar v, \bar w\rangle = 0$

Winkel: Def: $\bar v$ und $\bar w$ sind senkrecht zueinander $:\Longleftrightarrow \langle \bar v, \bar w\rangle = 0$

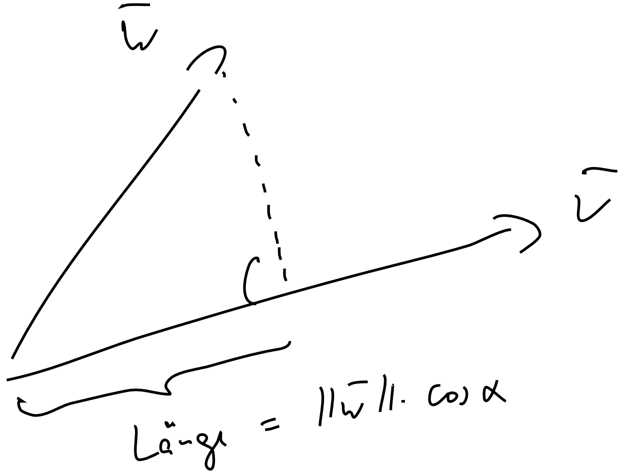
$$\cos\alpha := \frac{\langle \bar v, \bar v\rangle}{\|\bar v\| \cdot \|\bar w\|}$$ wobei α der Winkel zwischen $\bar v$ und $\bar w$ ist.

Plausibilität:

$\mathbb{R}^2$



$w_1 = \cos\alpha \cdot \|\bar w\|$



$$\langle \bar v, \bar w \rangle = \overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{\|\bar v\|}} \cdot \underbrace{\|\bar w\| \cdot \cos\alpha}_{= w_1}$$

$$\shortparallel$$

$$v_1 w_1 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v_2}} w_2 = v_1 \cdot w_1$$

Nachrechnen: Skalarprodukt ist unter Drehungen invariant

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}$$

z.z. $\langle \bar v, \bar w \rangle = \langle \bar v', \bar w' \rangle$

(man braucht $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>orthogonal</u>,

falls $\langle \varphi(\bar{v}), \varphi(\bar{w}) \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$ für alle $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$

Matrix A zu orthogonalem φ heißt <u>orthogonale Matrix</u>
(bzgl. Standardbasis)

A orthogonal $\iff$ $A^{-1} = A^T$

$$\Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^T} = \frac{1}{\det A}$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

orthogonale Abbildungen sind
volumentreu ($\det(A) = \pm 1$)
winkeltreu
längentreu

$\square$