Matrixmultiplikation

$\varphi : K^n \to K^m$, $\psi : K^m \to K^\ell$ lineare Abbildungen,

dann ist $\psi \circ \varphi : K^n \to K^\ell$ ist auch linear (nachprüfen, aber leicht!)

φ wird durch $(m \times n)$ Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ beschrieben $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ψ wird durch $(\ell \times m)$-Matrix B beschrieben und

$\psi \circ \varphi$ durch $(\ell \times n)$-Matrix C. Wie errechnet sich C aus A und B?

$$C \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = B \cdot \left(A \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \right) = B \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} k_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} k_i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{1i} k_i + \dots + b_{1m} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{mi} k_i \\ \vdots \\ b_{\ell 1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{11} k_i + \dots + b_{\ell m} \sum_{i=1}^{n} a_{mi} k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{1j} \cdot a_{ji} \cdot k_i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{\ell j} a_{ji} k_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{1j} a_{ji} \right) \cdot k_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{\ell j} a_{ji} \right) \cdot k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} b_{1j} a_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} b_{\ell j} a_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{m} b_{\ell j} a_{jn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

also

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot a_{jk}$$

praktische Berechnung

$$\begin{array}{r} \\ i\text{-te} \\ \text{Zeile} \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} & \vdots & \\ b_{i1} & \cdots\cdots & b_{im} \\ & \vdots & \end{pmatrix}
\cdot
\begin{array}{c} k\text{-te} \\ \text{Spalte} \\ \begin{pmatrix} & a_{1k} & \\ \cdots & \vdots & \\ & a_{mk} & \end{pmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$$

$$b_{i1} a_{1k} + b_{i2} \cdot a_{2k} + \ldots + b_{im} \cdot a_{mk}$$

Definiere Matrixmultiplikation: $B \cdot A := C$

Damit gilt $(B \cdot A) \cdot v = B \cdot (A \cdot v)$

$\boxed{\text{ACHTUNG}}$

A $(m \times n)$ - Matrix

B $(l \times k)$ - Matrix

$B \cdot A$ ist genau dann definiert, wenn $k = m$

MERKREGEL $(l \times m) \cdot (m \times n) = l \times n$

Satz (ohne Beweis) Eigenschaften der Matrixmultiplikation

(a) assoziativ

(b) es gelten beide Distributivgesetze $(B_1 + B_2) \cdot A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A$

$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + B \cdot A_2$$

(c) i.a. nicht kommutativ

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Bem: Oft ist $A \cdot B$ gar nicht definiert, wenn $B \cdot A$ definiert ist

(nicht komm mit Eins)

(d) $(n \times n)$-Matrizen über Körper K bilden einen Ring $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) = M_{n\times n}(K)$

nicht-kommutativ, falls $n \geq 2$

Null ist $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, Eins ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_n$

es gibt (falls $n \geq 2$) Nullteiler und sogar „nilpotente" Elemente

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)^* = GL_n(K) = GL(n, K)$ general linear group
invertierbare $(n\times n)$-Matrizen

Bem: Durch $k \cdot A := (k \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ wird eine Skalarmultiplikation auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ definiert ($k \in K$). Zusammen mit der komponentenweisen Addition wird $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ dadurch zu einem K-Vektorraum.

$$\dim_K \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$$

Standardbasis

$$\left\{ E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ & \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\ 1\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\}$$

als K-Vektorraum: $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \cong K^{m\cdot n}$

Es gilt: $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$ (nachprüfen!)

$$k \cdot A = (k \cdot \mathrm{Id}_m) \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}}_{m} \cdot A$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$

$$= A \cdot (k \cdot \mathrm{Id}_n) = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}}_{n}$$

Bem: $\varphi: K^n \to K^m$ linear, dargestellt durch $(m \times n)$-Matrix A

$v \in K^n$ Spaltenvektor, d.h. $(n \times 1)$-Matrix

definiert lineare Abbildung $\varepsilon_v : K \to K^n$, $1 \mapsto v$, deren darstellende Matrix gerade v ist (als Spaltenvektor)

$\varphi(v) \in K^m$ ist als Spaltenvektor $(m \times 1)$-Matrix,

darstellende Matrix der linearen Abb $\varepsilon_{\varphi(v)} : K \to K^m$, $1 \mapsto \varphi(v)$

Dann $\varphi \circ \varepsilon_v = \varepsilon_{\varphi(v)}$

bzw auf Matrixseite: $A \cdot v = \varphi(v)$

Also: die Matrixmultiplikation „Matrix · Spaltenvektor" ist Spezialfall der Matrixmultiplikation, die Verknüpfung linearer Abbildungen beschreibt.

Invertierbare Matrizen und Basiswechsel

$\varphi: K^n \to K^n$ (K-VR-)Isomorphismus $\iff$ A ist invertierbar

$v \mapsto A \cdot v$

$A \in Mat_{n\times n}(K)$

$(A \in GL_n(K) = Mat_{n\times n}(K)^*)$

d.h. es gibt $A^{-1} \in Mat_{n\times n}(K)$ mit

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = Id_n$$

(A^{-1} ist die darstellende Matrix von φ^{-1})

Wie sieht A^{-1} aus?

Ansatz

$A^{-1} = (x_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Gleichungssystem:

n^2 Gleichungen mit n^2 Unbekannten

$\iff$ die Spaltenvektoren von A, d.h. die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

bilden eine Basis von K^n

φ^{-1} ist bestimmt durch $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \mapsto e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Bem: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von K^n, $\varphi : K^n \to K^n$ linear

Angenommen man kennt $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$, aber nicht unbedingt $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$. Wie sieht dann die Matrix zu φ aus?

$$\left(\varphi(v_1) \,|\, \dots \,|\, \varphi(v_n)\right) \cdot \left(v_1 \,|\, \dots \,|\, v_n\right)^{-1}$$

als Spaltenvektoren

Verallgemeinerung: V n-dimensionaler K-VR

W m-dimensionaler K-VR

$\varphi : V \to W$ linear

Wähle (geordnete) Basen von V: $B = (v_1, \dots, v_n)$

von W: $B' = (w_1, \dots, w_m)$

$$K^n \xrightarrow[\sim]{i_B} V \xrightarrow{\varphi} W \xleftarrow[\sim]{i_{B'}} K^m$$

$$\begin{array}{ccc} e_1 & \mapsto & v_1 \\ & \vdots & \\ e_n & \mapsto & v_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} w_1 & \leftarrow\!\shortmid & e_1 \\ & \vdots & \\ w_m & \leftarrow\!\shortmid & e_m \end{array}$$

Def: Matrix von φ bezüglich B und B' ist die Matrix von

$$i_{B'}^{-1} \circ \varphi \circ i_B$$

$(K^n \to K^m)$

Satz / Beobachtung $\quad \varphi : \underset{\cong K^n}{V} \to \underset{\cong K^m}{W}, \quad \psi : \underset{\cong K^m}{W} \to \underset{\cong K^l}{X}$ Lineare

Basen $\quad B \quad B' = B' \quad B''$

$$\boxed{\text{Dann} \quad {}_{B''}(\psi \circ \varphi)_{B} = \left({}_{B''}\psi_{B'}\right) \cdot \left({}_{B'}\varphi_{B}\right)}$$

$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

Matrix von $(i_{B''}^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ i_B)$ $\qquad$ Matrix von $(i_{B''}^{-1} \circ \psi \circ i_{B'}) \cdot$ Matrix von $(i_{B'}^{-1} \circ \varphi \circ i_B)$

$\|$

Matrix von $(i_{B''}^{-1} \circ \psi \circ \underbrace{i_{B'} \circ i_{B'}^{-1}}_{= id} \circ \varphi \circ i_B)$

Basiswechsel: $\quad \varphi : \underset{\cong K^n}{V} \longrightarrow \underset{\cong K^m}{W}$

zwei Basen von V $\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} B' \\ C' \end{array} \right\}$ zwei Basen von W

$${}_{C'}\varphi_{C} = \left({}_{C'}{id_W}_{B'}\right) \cdot \left({}_{B'}\varphi_{B}\right) \cdot \left({}_{B}{id_V}_{C}\right)$$

Bem: id_V ist invertierbare Abbildung, $id_V^{-1} = id_V$,

also ist ${}_{B}{id_V}_{C}$ invertierbare Matrix, $\left({}_{B}{id_V}_{C}\right)^{-1} = {}_{C}{id_V}_{B}$

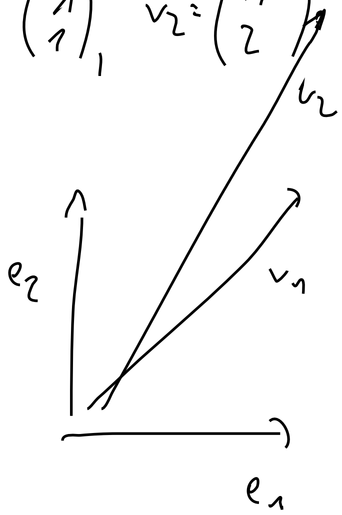
Spezialfall $V = W$ $(m = n)$ $\quad \varphi : V \to V \quad$ $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Basis von V

Man schreibt $\varphi_{\mathcal{B}}$ für ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$

$$\varphi_{\mathcal{B}'} = \left({}_{\mathcal{B}'}\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\right) \cdot \varphi_{\mathcal{B}} \cdot \left({}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}\right) = \left({}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \cdot \varphi_{\mathcal{B}} \cdot \left({}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}\right)$$

Basiswechselmatrix

Beispiel (1) $\quad V = K^2 \quad \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ Standardbasis $\quad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ geordnet $\quad$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



$\varphi : \quad v_1 \mapsto 2v_1$

$\qquad v_2 \mapsto -v_2$

$$\varphi_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten von $\varphi(v_1)$ in der Basis (v_1, v_2)

$\varphi(v_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2$
$= 2v_1 + 0 \cdot v_2$

entsprechend für $\varphi(v_2) =$
$a_{12} v_1 + a_{22} v_2$
$= 0 \cdot v_1 + (-1) v_2$

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \left({}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\quad e_1 = 2 \cdot v_1 - 1 v_2$

$\qquad e_2 = -1 v_1 + 1 v_2$

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Probe $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$