$\boxed{\text{EXKURS}}$ Unendliche Mächtigkeiten

$|M|$ = Mächtigkeit von M

$|M| \leq |N| \;:\Longleftrightarrow$ es gibt Injektion $M \to N$

$|M| = |N| \;:\Longleftrightarrow$ es gibt Bijektion $M \to N$

Bsp. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \dots \end{array}$$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \dots \\[6pt] \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\[6pt] \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\[6pt] \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

$$\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad -\frac{2}{1} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \cancel{\frac{2}{2}} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4}$$

Satz von Cantor-Bernstein-Schröder

$$|M| \le |N| \text{ und } |N| \le |M| \iff |M| = |N|$$

<u>Satz von Cantor</u>: $\quad |M| < |\mathrm{Pot}(M)|$

Beweis „Diagonalargument" ang ex Bijektion $\varphi : M \to \mathrm{Pot}(M)$

$$\begin{array}{c|cccccc|l}
 & m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & \\
\hline
m_0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \text{char Funktion von } \varphi(m_0) \\
m_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \text{— " — von } \varphi(m_1) \\
m_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \varphi(m_2) \\
m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varphi(m_3) \\
\vdots & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \text{char Fkt von } C \subseteq M
\end{array}$$

(Elemente von M: m_0, m_1, m_2, m_3)

char Funktion von $X \subseteq M$

$$\chi_X(m) = \begin{cases} 0 & m \notin X \\ 1 & m \in X \end{cases}$$

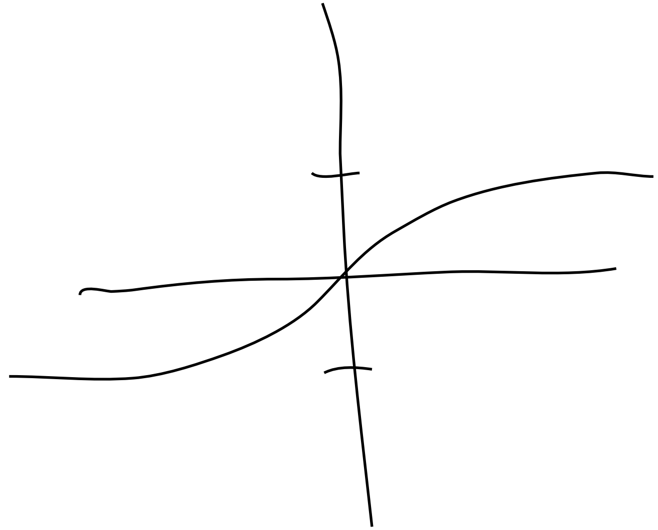
d.h. $m \in C \iff m \notin \varphi(m)$

ang $C = \varphi(m')$: $\quad m' \in C \iff m' \notin \varphi(m')$

Widerspruch

ähnlich: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

ang $\varphi: \mathbb{N} \to \underset{[0,1]}{\mathbb{R}}$ ist Bijektion



$$\begin{array}{ll}
\varphi(0) & 0{,}2379\ldots \\
\varphi(1) & 0{,}1134\ldots \\
\varphi(2) & 0{,}9998\ldots \\
\varphi(3) & 0{,}0000\ldots \\
 & \\
 & 0{,}3201\ldots
\end{array}$$

$\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$

$\ni$

$X \rightsquigarrow \chi_X$ char. Funkt

unendl. $\{0,1\}$-Folge

$\Downarrow$

Nachkommastellen einer Binärzahl in $[0,1]$

also $|\mathbb{R}| = |\mathrm{Pot}(\mathbb{N})|$

Mengenlehre

(1) Man kann unendl. Mächtigkeiten addieren, multiplizieren und exponentieren

$$|M| + |N| = |M \dot{\cup} N| \qquad \text{„disjunkte Vereinigung“}$$

$$|M| \cdot |N| = |M \times N|$$

$$|M|^{|N|} = |\{\text{Abbildungen von } N \text{ nach } M\}|$$

$|M|$ unendlich:

$$|M| + |M| = |M|$$

$$|M| \cdot |M| = |M|$$

$$2^{|M|} = |\mathrm{Pot}(M)| > |M|$$

(2) Zu jeder unendl. Mächtigkeit gibt es nächst größere

kleinste unendliche Mächtigkeit ist $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ „alef“

zweite $\aleph_1$, $\aleph_2$ ....

Kontinuumshypothese: $|\mathbb{R}| = \aleph_1$

Gödel, Cohen: unabhängig von den üblichen Axiomen ZFC der Mengenlehre

Exkursende

Zurück zur LA:

Beobachtung: V, W K-Vektorräume, $\varphi: V \to W$ linear
$\{v_i \mid i \in I\}$ Basis von V

- φ ist bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren $\varphi(v_i)$
  denn $\varphi\left(\sum_{i \in I} k_i v_i\right) = \sum_{i \in I} k_i \cdot \varphi(v_i)$

- für jede Auswahl von Bildern der Basisvektoren gibt es (genau) eine lineare Abbildung

Bsp: (a) $V = W = K$ $\quad \varphi: V \to W$ linear

Standardbasis von V $\quad e_1 = 1$ $\quad \varphi(e_1) = \varphi(1) = \lambda \in V = K$

$\varphi(k) = \varphi(k \cdot 1) = k \cdot \varphi(1) = k \cdot \lambda$

φ ist Multiplikation mit λ

(umgekehrt: Multiplikation mit λ ist linear)

b) $V = K^n$, $W = K$, $\varphi: V \to W$ linear
(als Spaltenvektoren)

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \underbrace{\varphi(e_i)}_{=: \lambda_i} = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \dots + \lambda_n k_n$$

c) $V = K$, $W = K^m$, $\varphi: V \to W$ linear

$$\varphi(1) = \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \varphi(k \cdot 1) = k \cdot \varphi(1) = k \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\mu_1 \\ k\mu_2 \\ \vdots \\ k\mu_m \end{pmatrix}$$

d) $V = K^n$, $W = K^m$, $\varphi: V \to W$ linear

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{m1} \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \varphi(e_n) = \begin{pmatrix} \mu_{1n} \\ \vdots \\ \mu_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n k_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i \begin{pmatrix} \mu_{1i} \\ \vdots \\ \mu_{mi} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} k_i \mu_{1i} \\ \vdots \\ k_i \mu_{mi} \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \mu_{11} + \ldots + k_n \mu_{1n} \\ \vdots \\ k_1 \mu_{m1} + \ldots + k_n \mu_{mn} \end{pmatrix}$$

m Zeilen: erster Index

n Spalten: zweiter Index

$$
\begin{pmatrix}
\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\
\mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\
 & \vdots & &
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mu_{21}k_1 + \cdots + \mu_{2n}\cdot k_n \\
\\
\\
\end{pmatrix}
\quad \text{2. Eintrag}
$$

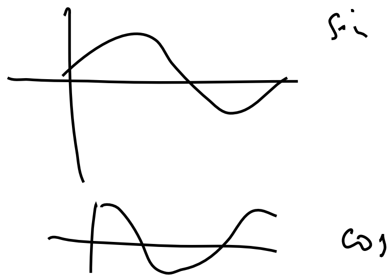
$$
\begin{array}{l}
\mu_{21}\cdot k_1 \\
\mu_{22}\cdot k_2 \\
\vdots \qquad \vdots \\
\mu_{2n}\cdot k_n \\
\hline
\Sigma
\end{array}
$$

Fazit: lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ werden durch Matrixmultiplikation (Matrix von links wird mit Spaltenvektor rechts multipliziert) beschrieben

$m \times n$ Matrix: m Zeilen, n Spalten

i-te Spalte ist das Bild von e_i, dem i-ten Vektor der Standardbasis

Bsp 2) lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

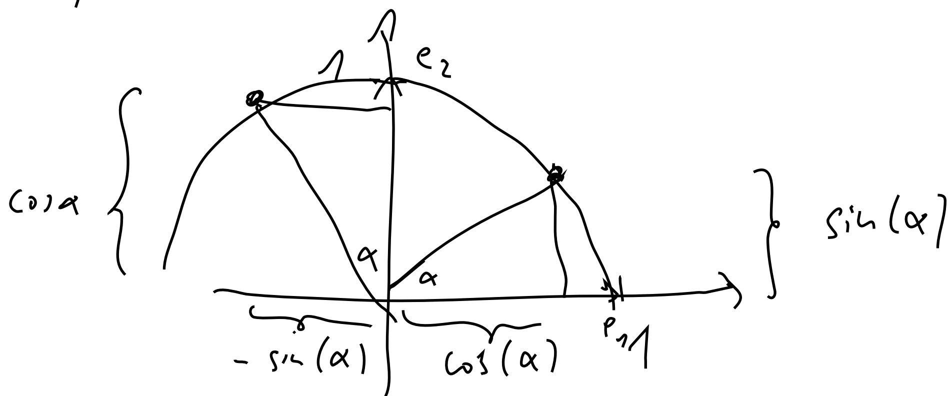


a) Streckung um λ: $e_i \mapsto \lambda e_i$

zugehörige Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

insbesondere $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Identitätsmatrix zur Abbildung $id_{\mathbb{R}^2}$

b) Drehungen um Winkel α (im math. Sinn, d.h. gegen den Uhrzeiger)



Drehmatrix zum Winkel α $\qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Sonderfall $\alpha = 90^\circ$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad e_1 \mapsto e_2$, $\quad e_2 \mapsto -e_1$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\qquad e_1 = 1$, $\quad e_2 = i$

Drehung um 90° $\hat{=}$ Multiplikation mit i

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 = i^2$$

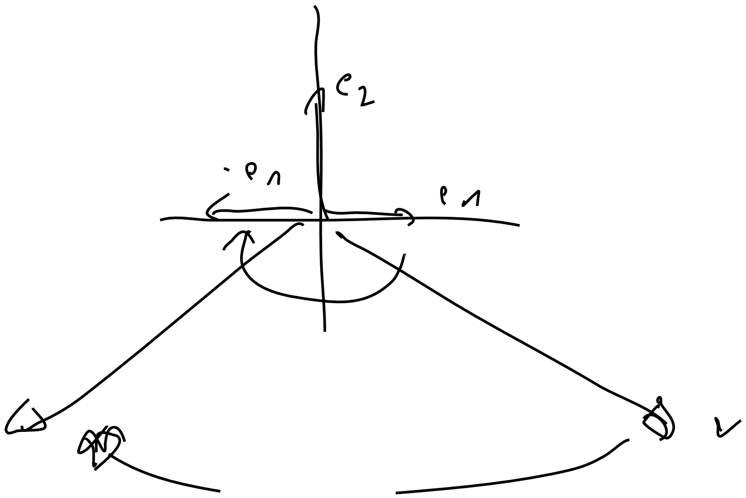
in $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR kann man die Multiplikation zweier Vektoren nicht beschreiben,
aber die Multiplikation mit einer festen Zahl (hier i) lässt sich als lineare Abbildung auffassen

Sonderfall $\alpha = 180^\circ$ $\qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -$ Identität

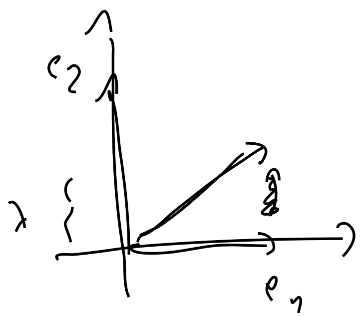
„Streckung um -1“

c) <u>Spiegelungen</u> an x-Achse $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto -e_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

an y-Achse $e_1 \mapsto -e_1$, $e_2 \mapsto e_2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



d) <u>Scherung</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$



e) Verschiebungen sind keine linearen Abbildungen, z.B da 0 nicht
(Translationen) fest bleibt

Bsp 3) $\frac{d}{dX} : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ ist lineare Abbildung, denn

„Ableitung"

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(r \cdot f)' = r \cdot f' \qquad r \in \mathbb{R}$$

Standardbasis $e_0 = 1, \; e_1 = X, \; e_2 = X^2, \; e_3 = X^3, \; \ldots$

$$\frac{d}{dX}: \quad e_0 \mapsto 0, \quad e_1 \mapsto e_0, \quad e_2 \mapsto 2e_1, \quad e_3 \mapsto 3e_2$$

„unendliche Matrix"

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} C^0(\mathbb{R}) = \text{Menge der stetigen Abbildungen } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ C^1(\mathbb{R}) = \text{Menge der stetig differenzierbaren Abb. } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{beide,} \\ \mathbb{R}\text{-VR} \end{array}$$

$$\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \quad \text{lineare Abbildung}$$

keine Basis ist hinschreibbar, Dimension überabzählbar