$$(0,1,0,0,1,0,0,1) + (0,1,0,1,0,1,0,0)$$

$$\underset{\text{in } \mathbb{R}^8}{=} (0,2,0,1,1,1,0,1)$$

$$\underset{\text{in } \mathbb{F}_2^8}{=} (0,0,0,1,1,1,0,1)$$

NB:

als Binärzahlen

$$\begin{array}{r} 01001001 \\ +\ 01010100 \\ \hline 10011101 \end{array}$$

<u>Bem:</u> V VR über $\mathbb{R}$

$$3 \cdot v = v + v + v$$

(denn $v+v+v = 1 \cdot v + 1 \cdot v + 1 \cdot v = (1+1+1) \cdot v = 3 \cdot v$)

V VR über $\mathbb{F}_2$

$$v+v+v = \ldots = \underbrace{(1+1+1)}_{\text{in } \mathbb{F}_2} \cdot v = 1 \cdot v = v$$

Beachte: in $\mathbb{F}_2$ $1 = 3$

Vektorraum: 2 Operationen: Vektoraddition
Skalarmultiplikation

Untervektorräume

V K-Vektorraum

Def: $U \subseteq V$ ist ein K-Untervektorraum
(bzw. kurz: Untervektorraum, wenn klar ist, um welchen Körper K es geht)

falls U mit den eingeschränkten Operationen selbst ein K-Vektorraum ist, d.h.

U ist eine Untergruppe und $k \cdot u \in U$ für alle $k \in K$, $u \in U$

Kürzer: $U \neq \emptyset$, $u_1 + u_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$
$k \cdot u \in U$ für alle $k \in K$, $u \in U$

Beispiele: (1) $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$

$U_1 = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Untervektorraum

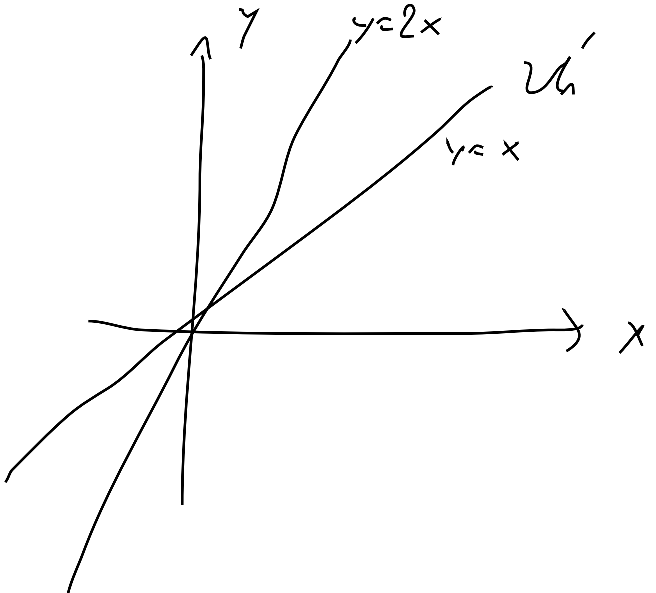
$U_2 = \{(x,y,x+y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ —"—

$(0,0,0) \in U_2 \neq \emptyset$

$(x_1,y_1,x_1+y_1) + (x_2,y_2,x_2+y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, x_1+x_2+y_1+y_2) \in U$

$k(x,y,x+y) = (kx, ky, kx+ky) \in U$

(2) $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^2$ bzw Ebene



Untervektorräume:

$\{0\}$

$\mathbb{R}^2$

Geraden durch den Ursprung, $\{(0,0)\}$

insbesondere: Geraden, die nicht durch $(0,0)$ gehen, bilden keine Unterräume

(3) Im $\mathbb{R}^3$: Untervektorräume $\{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(0,0,0)\}$

Geraden durch $\{(0,0,0)\}$

Ebenen durch $\{(0,0,0)\}$

$\mathbb{R}^3$

Erzeugnis von (Unter-)Vektorräumen

V K-Vektorraum

$v_1, \dots, v_k \in V$

Def: Der von $v_1, \dots, v_k$ erzeugte Untervektorraum $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \dots, v_k$ enthält (bzgl. Inklusion)

Dieses Erzeugnis existiert, nämlich der Schnitt aller Untervektorräume, die $v_1, \dots, v_k$ enthalten (leichte Übung: dies ist wieder ein Untervektorraum)

Wenn $v_1, \dots, v_\ell \in U$ (Untervektorraum von V),

dann ist auch jedes Element der Form $\underbrace{k_1 v_1 + \dots + k_\ell v_\ell}_{\sum_{i=1}^{\ell} k_i \cdot v_i} \in U$

Solch ein Element heißt „Linearkombination der v_i"

<u>Beh:</u> $\left\{ \sum_{i=1}^{\ell} k_i \cdot v_i \;\middle|\; k_i \in K \right\} = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$

<u>Beweis:</u> „$\subseteq$" folgt aus Bemerkung oben

„$\supseteq$": z.z.: die linke Seite ist ein Untervektorraum, der $v_1, \dots, v_\ell$ enthält

- $v_j = \sum_{i=1}^{\ell} k_i v_i$ mit $k_j = 1$ und $k_i = 0$ für $i \neq j$

auch: $\sum_{i=1}^{\ell} 0 \cdot v_i = 0_V$

- $$\sum_{i=1}^{\ell} k_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{\ell} k_i' v_i = \sum_{i=1}^{\ell} (k_i \cdot v_i + k_i' \cdot v_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{(k_i + k_i')}_{\in K} \cdot v_i$$
- $$k \cdot \left(\sum_{i=1}^{\ell} k_i \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{\ell} k \cdot (k_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{(k \cdot k_i)}_{\in K} \cdot v_i$$

$\boxtimes$

<u>Sprachgebrauch</u>: Man sagt: $v_1, \dots, v_\ell$ erzeugen V, falls $V = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$ bzw. $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ ist ein Erzeugendensystem von V

Bsp: (1) $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ bilden ein Erzeugendensystem

denn $(r_1, r_2) = r_1 \cdot (1,0) + r_2 \cdot (0,1)$

— $v_1' = (1,1)$, $v_2' = (-2,3)$ bilden ebenfalls Erzeugendensystem

denn zu $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gibt es a, b mit $(r_1, r_2) = \underbrace{a \cdot (1,1) + b \cdot (-2,3)}_{= (a-2b,\, a+3b)}$

— v_1, v_2, v_2' bilden ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$

— v_1' allein ist kein Erzeugendensystem, $\langle v_1' \rangle = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$

„echter" Untervektorraum

— $v_1' = (1,1)$, $v_3 = (-2,-2)$ bilden kein Erzeugendensystem

$\langle v_1', v_3 \rangle = \langle v_1' \rangle$

V ist K-Vektorraum
$v, v_i \in V$

<u>Def:</u>

- v ist linear abhängig von $v_1, \ldots, v_\ell$, falls $k_1, \ldots, k_\ell$ in K existieren mit $v = k_1 \cdot v_1 + \ldots + k_\ell \cdot v_\ell$, d.h. falls $v \in \langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle$

  Sonst: v ist linear unabhängig

- $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ ist linear unabhängig ($v_1, \ldots, v_\ell$ alle verschieden), falls kein $v_i \in \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ linear abhängig ist von den anderen

<u>Bsp:</u> $V = \mathbb{R}^3$

- $(1,2,2)$ ist linear abhängig von $(1,0,0)$ und $(0,1,1)$, da $(1,2,2) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,1)$
- $(1,2,2)$ ist linear unabhängig von $\underbrace{(1,0,0) \text{ und } (0,0,-2)}_{\text{jede Linearkombination hat 2. Koordinate } = 0}$

- $\{(1,2,2), (1,0,0), (0,1,1)\}$ ist linear abhängig
- $\{(1,2,2), (1,0,0), (0,0,-2)\}$ ist linear unabhängig ⟵ Fehlendes Nachrechnen!

Spezialfälle: (a) Der Vektor 0_V ist (linear) abhängig von beliebigen anderen Vektoren

$\{v_1, \ldots, v_e, 0_V\}$ ist stets linear abhängig

(b) $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$ einzige Linearkombination der leeren Menge ist

„leere Summe" $\sum_{\emptyset} \ldots := 0_V$

analog

$a^0 = 1$

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

Def: Vektorraum V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Def: Eine Basis eines Vektorraums ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem

leicht einzusehen: in endlich erzeugten Vektorräumen gibt es stets Basen (nämlich minimale Erzeugendensysteme)

mathematisch schwer: in allen Vektorräumen gibt es Basen!

z.B. $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, nicht endlich erzeugt,

d.h. es gibt keine reellen Zahlen $r_1, \dots, r_n$, so dass jede reelle Zahl von der Form $q_1 \cdot r_1 + \dots + q_n r_n$ ist mit $q_i \in \mathbb{Q}$

Kein Mensch hat je eine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-VR gesehen!

Bsp: (1) $\mathbb{R}^n$ Standardbasis

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ $(1,2,0)$, $(-1,0,7)$, $(3,3,3)$ ist Basis

(3) $\mathbb{R}^3$ $(1,2,0)$, $(-1,0,7)$, $(0,2,7)$ keine Basis

$$(0,2,7) = (1,2,0) + (-1,0,7)$$

(4) $\mathbb{R}[X]$ Basis $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$